

Jean-Louis Pac



Systemes dynamiques

Cours et exercices corrigés

2^e édition

Licence et Master
Écoles d'ingénieurs

DUNOD



SHOUT **IT**
SHARE

Jean-Louis Pac

Systemes dynamiques

Cours et exercices corrigés

2^e édition

DUNOD

Illustration de couverture : © Fernando Cortés – Fotolia.com

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du

Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, Paris, 2012, 2016

5 rue Laromiguière, 75005 Paris

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-074477-0

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos	VII
Chapitre 1. Généralités sur les systèmes différentiels	1
1.1 Introduction	1
1.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz	7
1.3 Symétries orbitales	14
Chapitre 2. Flot et conjugaison en temps continu	17
2.1 Flot d'un système dynamique	17
2.2 Conjugaison des systèmes dynamiques	21
2.3 Quelques propriétés générales du flot	30
Chapitre 3. Équilibres	33
3.1 Introduction	33
3.2 Stabilité des équilibres : exemple et définitions	33
3.3 Autres notions	40
Chapitre 4. Stabilité des systèmes linéaires	43
4.1 Réduction des endomorphismes	43
4.2 Flot et stabilité des systèmes linéaires	44
4.3 Stabilité structurelle et conjugaison	52
4.4 Trajectoires génératrices d'un système linéaire	56
Chapitre 5. Propriétés élémentaires en dimensions 1 et 2	65
5.1 Propriétés de base des systèmes de dimension 1	65
5.2 Portraits de phases d'un système linéaire de dimension 2	66
5.3 Courbure d'une trajectoire plane	69
5.4 Critère de Bendixson	71
5.5 Évolution d'un portrait de phases	73
Chapitre 6. Propriétés locales du flot	79
6.1 Introduction	79
6.2 Généralités et exemples	79
6.3 Théorie de Liapounov de la stabilité	83
6.4 Linéarisation autour des équilibres	88
6.5 Linéarisation autour des équilibres hyperboliques	90
Chapitre 7. Structuration du flot	97
7.1 Ensembles-limites	98
7.2 Orbites périodiques	104
7.3 Variétés remarquables	107

Chapitre 8. Flots hors de $\mathbb{R}^n$	113
8.1 Dérivation hors de $\mathbb{R}^n$	113
8.2 Flot sur un cercle	114
8.3 Flot sur la sphère S^2	115
8.4 Flot sur la sphère S^n	117
8.5 Flot sur le tore	119
8.6 Thème d'étude : le pendule	121
Chapitre 9. Bifurcations locales	129
9.1 Introduction	129
9.2 Stabilité structurelle des équilibres	130
9.3 Bifurcations locales en dimension 1	133
9.4 Bifurcations locales en dimension supérieure à 1	137
Chapitre 10. Systèmes à temps discret : équilibres et cycles	141
10.1 Introduction	141
10.2 Notions de base	142
10.3 Équilibres	144
10.4 m -cycles	152
10.5 Exposant de Liapounov	155
10.6 Autres notions	157
Chapitre 11. Introduction au chaos en temps continu	159
11.1 Ensembles-limites en dimension 2	159
11.2 Théorème de Poincaré-Bendixson	168
11.3 Introduction au chaos	170
Chapitre 12. Introduction au chaos en temps discret	179
12.1 Les équilibres de la suite logistique pour $r > 0$	180
12.2 Les cycles de la suite logistique pour $3 < r \leq 4$	184
12.3 Le chaos dans un système à temps discret	191
Chapitre 13. Annexes	197
Annexe 1 : Systèmes et mécanique céleste	197
Annexe 2 : Topologie et autres structures	199
Annexe 3 : Théorème de Cauchy et déterminisme	207
Annexe 4 : Réduction des endomorphismes	210
Annexe 5 : Deux compléments mathématiques	215
Annexe 6 : Fractales	219
Annexe 7 : Schéma numérique	225
Chapitre 14. Corrigés des exercices et problèmes	227
Bibliographie	269
Index	271

AVANT-PROPOS

Le but de ce livre est de fournir les principales clés pour étudier le comportement d'un système dynamique, c'est-à-dire d'un ensemble mécanique, physique, économique, environnemental ou autre dont on connaît la loi d'évolution.

On s'intéresse principalement aux questions qualitatives : un système évolue-t-il vers un cycle-limite ? vers un équilibre ? vers un autre destin ? Ce livre fournit les outils méthodologiques qui permettent d'aborder ces questions. La recherche de solutions analytiques n'est pas un but en soi, mais celles-ci sont exploitées quand elles sont accessibles : c'est le cas des systèmes linéaires, dont on montre l'importance. On établit ensuite une classification des comportements à long terme d'un système. Ainsi est mis en évidence le cas complexe du chaos, qui donne lieu depuis plusieurs décennies à d'actives recherches.

Le cadre est celui des systèmes autonomes, c'est-à-dire non commandés. Aussi, le champ couvert est-il frontalier mais distinct de celui de la commande des systèmes.

Ce livre traite des systèmes à temps discret et des systèmes à temps continu ; nombre de méthodologies mises en œuvre au bénéfice des premiers sont directement transposables aux seconds.

Le très bon accueil réservé à l'édition initiale m'a conduit à garder la structure générale. Cette deuxième édition :

- accorde une plus large place aux systèmes à temps discret ;
- voit l'approfondissement de certains thèmes, dont la suite logistique qui constitue une introduction de choix au chaos en temps discret ;
- comporte un plus grand nombre d'exercices et problèmes : le choix d'une correction détaillée de chacun d'entre eux est maintenu.

J'invite le lecteur qui aurait des questions ou remarques liées au sujet de ce livre à m'en faire part par mail à l'adresse : jeanlouispac@yahoo.fr

Jean-Louis Pac

GÉNÉRALITÉS SUR LES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS

1

1.1 INTRODUCTION

Un **système dynamique** est un ensemble mécanique, physique, économique, environnemental ou de tout autre domaine dont l'**état** (ensemble de grandeurs suffisant à qualifier le système) évolue en fonction du temps. L'étude de l'évolution d'un système nécessite donc la connaissance :

- de son état initial, c'est-à-dire son état à l'instant t_0 ;
- de sa loi d'évolution.

Un système peut être :

- **à temps continu** : ce livre accorde une part importante à ce cas, qui est le plus fréquent ;
- **à temps discret** : les systèmes à temps discret font l'objet des chapitres 10 et 12. Il faut noter que toute simulation numérique d'un système à temps continu implique une discrétisation du temps.

Il peut également être :

- **autonome**, si sa loi d'évolution ne dépend pas du temps (la loi est alors dite stationnaire) ;
- **non autonome** ; sa loi d'évolution dépend alors du temps.
- **Un premier exemple : l'oscillateur harmonique** est un exemple de système autonome à temps continu.

Le déplacement horizontal ξ d'une masse fixée à l'extrémité d'un ressort est régi par l'équation différentielle : $\frac{d^2\xi}{dt^2} + \omega^2\xi = 0$, où ω dépend des paramètres du problème. Cet exemple simple est instructif car il permet déjà de cerner ce qu'on va appeler **état** et qu'on notera x .

Nous allons mettre en effet la loi d'évolution du système sous la forme :

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

Cette forme est suffisamment générale pour englober un grand nombre de systèmes que l'ingénieur, le physicien ou l'économiste aura à étudier.

L'équation de l'oscillateur harmonique est d'ordre 2 ; elle n'est donc pas sous la forme souhaitée. On l'amène à cette forme en remplaçant $\xi \in \mathbb{R}$ par $x \in \mathbb{R}^2$, ce qui la réduit de l'ordre 2 à l'**ordre 1**. La transformation est la suivante : on pose

$$x(t) = \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{pmatrix}$$

où $\dot{\xi}$ désigne la dérivée de ξ par rapport au temps.

On obtient ainsi effectivement l'équation de l'oscillateur sous la forme de l'équation différentielle vectorielle **d'ordre 1** :

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

On a diminué l'ordre au prix de l'augmentation de la dimension ($x \in \mathbb{R}^2$, alors que ξ appartenait à $\mathbb{R}$).

Plus généralement, on passera de (dimension 1, ordre n) à (dimension n , ordre 1) en écrivant l'équation différentielle :

$$\frac{d^n \xi}{dt^n} = g\left(\xi, \frac{d\xi}{dt}, \frac{d^2 \xi}{dt^2}, \dots, \frac{d^{n-1} \xi}{dt^{n-1}}\right)$$

sous la forme d'une équation différentielle vectorielle $\dot{x} = f(x)$, où x est le vecteur de $\mathbb{R}^n$ suivant :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ d\xi/dt \\ \vdots \\ d^{n-2}\xi/dt^{n-2} \\ d^{n-1}\xi/dt^{n-1} \end{pmatrix}$$

En effet, on a :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

À l'image des exemples précédents, l'**espace des états** est dans de nombreux cas un **domaine** Ω de l'espace $\mathbb{R}^n$. On l'appelle aussi **espace des phases**, terminologie introduite par Poincaré. Nous rappelons qu'un domaine est un ouvert connexe, c'est-à-dire composé « d'un seul morceau ». La pertinence de cette hypothèse est justifiée par le

fait que si Ω comportait plusieurs composantes connexes (plusieurs « morceaux »), le système se décomposerait en autant de sous-systèmes n'interagissant pas, donc analysables individuellement.

Mais $\mathbb{R}^n$ peut ne pas suffire pour modéliser certains systèmes pourtant très simples (à l'image du pendule) qui par exemple mettent en jeu des angles, donc des éléments de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (ou $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$). Cette situation est illustrée par l'exemple ci-après.

• Un deuxième exemple de système autonome : le pendule simple à tige rigide

L'état d'un tel pendule est composé de sa position angulaire et de sa vitesse angulaire. Son espace d'état est donc :

- $\mathbb{R}^2$ si on traduit la position angulaire par un réel. Ce choix, qui revient à « compter les tours », s'imposerait dans le cas du repérage angulaire d'un pendule de torsion.
- le produit d'un cercle par la droite réelle, donc un cylindre, si on traduit la position angulaire par un réel à $2k\pi$ près.

Dans le cas d'une dimension n quelconque, on parle de **variété**, entité géométrique localement assimilable à une portion de $\mathbb{R}^n$ comme le précise l'annexe 2, paragraphe « variétés ». Tout système mécanique dont un élément est mobile autour d'un axe ou d'un point répond à la même logique ; la robotique peut fournir des exemples complexes.

• Systèmes non-autonomes

On peut encore utiliser le procédé d'extension d'état pour transformer un système non-autonome en système autonome. En effet, la non-autonomie se traduit par une équation de la forme $\dot{x} = f(x, t)$. Il suffit dès lors d'ajouter l'état $x_{n+1} = t$, ce qui réhabilite la forme $\dot{x} = f(x)$, avec cette fois $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ et l'équation supplémentaire $\dot{x}_{n+1} = 1$.

Exemple

Soit le système non-autonome (donc de loi non-stationnaire) $\ddot{\xi} = a\dot{\xi} + b\xi + \varphi(t)$.

$$\text{Avec } x = \begin{pmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \text{ on a : } \dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \ddot{\xi} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi(x_3) \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a donc transformé le système initial non-autonome d'ordre 2 en un système autonome d'ordre 1 sur $\mathbb{R}^3$, de la forme $\dot{x} = f(x)$.

Généralisons encore : ce qui a été fait pour les équations différentielles s'applique aux **systèmes différentiels**, autonomes ou non. On se reportera à l'exercice 1.1.

Intermède historique : Poincaré, un grand précurseur

Henri Poincaré (mathématicien, physicien et philosophe français, 1854-1912), un des plus grands scientifiques de tous les temps, a éclairé de son génie la fin du XIX^e siècle. Comme pour d'autres grands mathématiciens, la mécanique céleste a été l'une des motivations de ses travaux et l'a conduit à modéliser les systèmes différentiels autour de la notion d'« espace des phases », que nous appelons aujourd'hui espace des états... et que nous retrouvons tout au long de ces pages. L'usage a gardé partiellement cette dénomination initiale dans l'expression de « portrait de phases ».

Poincaré a fait un certain nombre de découvertes fondamentales, certaines très en avance sur son temps. Leur ampleur et leur variété justifieront un nouvel intermède historique dans ce document. À suivre donc...

Exercice 1.1 Mise de systèmes différentiels sous la forme $\dot{x} = f(x)$

1. Mettre le système différentiel :
$$\begin{cases} \ddot{u} = a\dot{u} + bu + c\dot{v} + dv \\ \ddot{v} = e\dot{v} + fv + g\dot{u} + hu \end{cases}$$
 sous la forme d'un système linéaire $\dot{x} = A \cdot x$, où x est un vecteur de dimension n convenable et A une matrice carrée $n \times n$.
2. Mettre le système différentiel :
$$\begin{cases} \ddot{u} = a\dot{u} + bu + c\dot{v} + dv + \alpha(t) \\ \ddot{v} = e\dot{v} + fv + g\dot{u} + hu + \beta(t) \end{cases}$$
 (non autonome) sous la forme d'un système autonome $\dot{x} = f(x)$, où x est un vecteur de dimension convenable.
3. Mettre le système différentiel :
$$\begin{cases} \dot{u} = uv - \sin u \cos v = h(u, v) \\ \dot{v} = u\dot{v} + 2uv + u^3\dot{v} + e^v = k(u, v, \dot{v}) \end{cases}$$
 sous la forme d'un système $\dot{x} = g(x)$, où x est un vecteur de dimension convenable.

Hypothèses pour la suite : nous allons étudier le système différentiel S suivant :

$$\boxed{\dot{x} = f(x)} \quad (S)$$

dans lequel f est une fonction de classe C^1 définie sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Nous relâcherons assez souvent cette hypothèse en supposant f seulement localement lipschitzienne, pour des raisons qui apparaîtront au paragraphe 1.2.1.

L'application $x \in \Omega \mapsto f(x) \in \mathbb{R}^n$ représente un **champ de vecteurs** (c'est le « champ des vitesses » du vecteur d'état x), expression qu'on pourra substituer au mot système. On adoptera quelques variantes dans le vocabulaire en nommant l'équation ci-dessus, indifféremment :

- **équation d'évolution du système** (sous-entendu : équation vectorielle régissant l'évolution d'un système physique, mécanique, économique, etc.) ;
- **équation du système** ;
- **système** (sous-entendu : système d'équations différentielles scalaires).

On appelle :

- **trajectoire** une solution du système différentiel ;
- **orbite** du système dynamique la courbe de $\mathbb{R}^n$ image de l'ensemble des temps par une trajectoire.

De façon imagée : alors que la trajectoire est une courbe graduée en t , l'orbite est une courbe non graduée.

On utilise souvent une notion intermédiaire en pourvoyant une orbite de flèche(s) indiquant le sens croissant du temps. Un ensemble d'orbites fléchées est appelé **portrait de phases** : voir la figure 1.1.

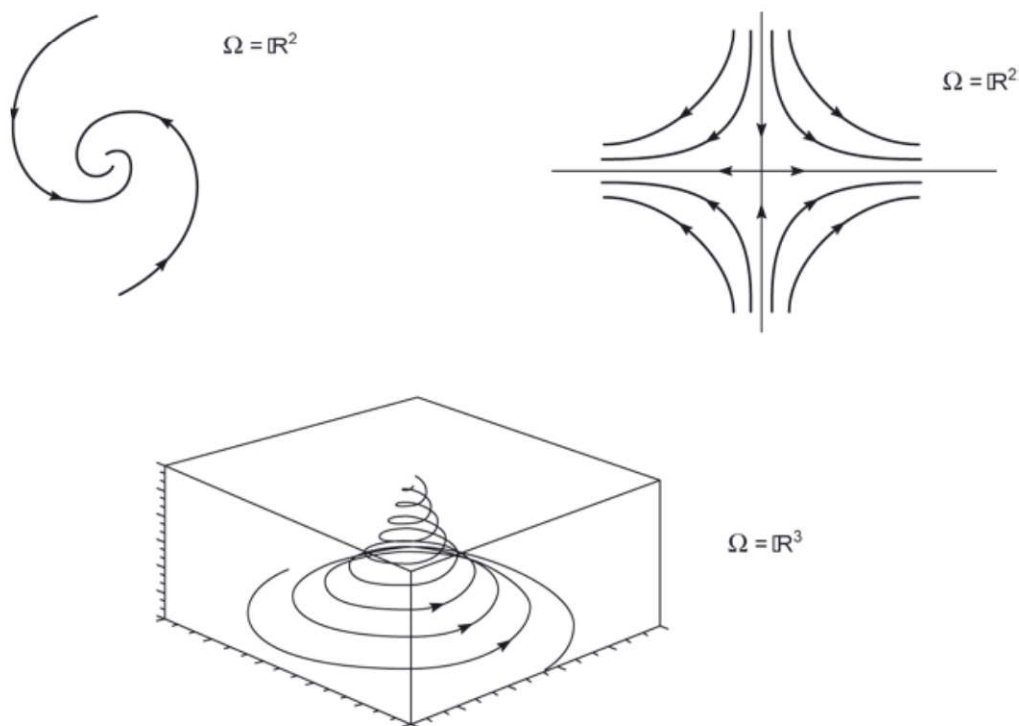


Figure 1.1- Trois portraits de phases.

La pratique montre une certaine souplesse dans la terminologie : dans de nombreux documents, orbite et trajectoire sont synonymes. Dans tous les cas, il convient de bien noter le sens des termes.

Exercice 1.2 Des portraits de phases

Tracer les portraits de phases des systèmes suivants, dont l'état est défini sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:

1. **Croissance d'une population** : en environnement infini, une population x croît selon $\dot{x} = \alpha x$ où $\alpha > 0$ (croissance malthusienne).

Si l'environnement est fini (aire, ressources, ...), la population x ne peut pas dépasser une certaine valeur. Moyennant un choix convenable des unités, elle satisfait l'équation **logistique** proposée par l'économiste François Verhulst : $\dot{x} = x(1 - x)$, avec $\Omega =]0, 1[$. On tracera le portrait de phases de l'équation logistique sans la résoudre analytiquement, avec $\Omega = \mathbb{R}$ (noter que seul $\Omega = \mathbb{R}_+$ a une interprétation démographique).

2. **Un système unidimensionnel** :

$$\dot{x} = x(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) \text{ avec } \Omega = \mathbb{R}.$$

3. **Deux systèmes bidimensionnels** [avec $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$] :

$$(a) \quad \dot{z} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} z, \text{ avec } \Omega = \mathbb{R}^2$$

$$(b) \quad \dot{z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} z, \text{ avec } \Omega = \mathbb{R}^2$$

4. **Un système 2-D** : $\begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(1 - \rho) \\ 1 \end{pmatrix}$
(représentation dans $\mathbb{R}^2$, en coordonnées polaires).

Exercice 1.3 Toute orbite est connexe

Soit S un système dynamique $\dot{x} = f(x)$, avec f localement lipschitzienne sur Ω , domaine de $\mathbb{R}^n$. Montrer que toute orbite est connexe.

Exercice 1.4 Un système unidimensionnel a-t-il des orbites périodiques ?

On rappelle que les deux seules variétés connexes de dimension 1 sont $\mathbb{R}$ et le cercle (ou tore T^1).

Soit S un système dynamique $\dot{x} = f(x)$ sur Ω , variété de dimension 1. On suppose f continue.

1. Pour $\Omega = \mathbb{R}$, montrer que S ne possède aucune solution périodique non triviale (c'est-à-dire non constante).
2. Pour $\Omega = T^1$, montrer que S peut posséder une solution périodique non triviale.

1.2 THÉORÈME DE CAUCHY-LIPSCHITZ

1.2.1 Le théorème

Le théorème de Cauchy (ou de Cauchy-Lipschitz) indique que pour toute solution initiale $x_0 \in \Omega$ le système différentiel $\dot{x} = f(x)$ a une **solution unique**.

Il fait l'objet de l'annexe 3 et s'exprime ainsi :

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Soit (E) l'équation différentielle $\dot{x} = f(x)$, où f est une fonction localement lipschitzienne sur un domaine Ω de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Alors, pour tout $x_0 \in \Omega$, il existe une solution maximale unique de (E) satisfaisant $x(0) = x_0$.

- Notons que l'hypothèse (que nous ferons souvent) que f est de classe C^1 est plus exigeante que celle du théorème de Cauchy, car :
 f de classe $C^1 \implies f$ localement lipschitzienne (voir l'exercice 1.5).
- Qu'est-ce qu'une solution maximale ? Pour chaque condition initiale x_0 , on peut choisir un intervalle de temps ouvert $J(x_0)$ **maximal** au sens de l'inclusion, donc hors duquel la solution $x(t)$ sort de Ω ou n'est pas définie. On peut appeler $J(x_0)$ **plage temporelle** de x_0 . La solution $x(t)$ correspondante est elle-même dite maximale. Dans de nombreux cas, $J = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_+$.
- On dit que deux trajectoires x_1 et x_2 **se coupent** s'il existe un temps τ tel que $x_1(\tau) = x_2(\tau)$. Mais dans ce cas-là, le caractère autonome du système permet dans le théorème de Cauchy de remplacer $x(0) = 0$ par $x(\tau) = 0$, ce qui montre que deux trajectoires qui se coupent sont identiques. L'exercice 1.6 montre que ce résultat est faux si f n'est pas localement lipschitzienne.
- Pour les systèmes linéaires, f étant alors un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, on a $\Omega = \mathbb{R}^n$. Les solutions étant des exponentielles matricielles (chapitres suivants), on a : $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, $J(x_0) = \mathbb{R}$. Pour des systèmes non-linéaires, des contre-exemples simples (on en donne un ci-après) montrent que $J(x_0)$ peut être distinct de $\mathbb{R}$.
- On peut exprimer le théorème de Cauchy d'une façon différente en disant qu'à un présent donné correspondent un passé unique et un avenir unique, ce qui définit le **déterminisme**. On se reportera à l'annexe 3.

Intermède historique : Cauchy, un mathématicien prolifique

Augustin Cauchy, mathématicien français (1789-1857), a apporté une contribution fondamentale à tous les secteurs des mathématiques de son temps. Nous lui devons la

première définition rigoureuse de la continuité (quel que soit ε , il existe η tel que...), de l'intégrale définie : les sommes dites de Riemann auraient pu porter son nom. La théorie des fonctions holomorphes lui doit ses fondements. Quant aux systèmes différentiels, l'importante notion de déterminisme est étroitement associée au théorème de Cauchy – Lipschitz, dont la formulation initiale date de 1820. Toujours dans le domaine des systèmes dynamiques, Cauchy a apporté sa contribution à la théorie des perturbations, donc à l'analyse d'un problème phare pour les mathématiciens et astronomes depuis le XVIII^e siècle : la stabilité du système solaire.

Un exemple de $J(x_0)$ borné : le système non-linéaire suivant : $\dot{x} = 1 + x^2$ fournit un exemple très simple (la dimension de l'espace d'états est $n = 1$) d'intervalle $J(x_0)$ borné. On a en effet :

$$\frac{dx}{1+x^2} = dt ; \int_{x_0}^x \frac{dx}{1+x^2} = t - t_0 \text{ et, si } t_0 = 0 :$$

$\arctan x - \arctan x_0 = t$. D'où : $x = \tan(t + \arctan x_0)$. Il apparaît ainsi que :

$$J(x_0) =] -\pi/2 - \arctan x_0, \pi/2 - \arctan x_0[.$$

Par exemple, $J(0) =] -\pi/2, \pi/2[$ et $J(-1) =] -\pi/4, 3\pi/4[$ (ce qui correspond à $\arctan x_0 = -\pi/4$). Le caractère borné de J provient ici de la nature de la fonction $x(t)$: il s'agit d'une fonction tangente, prenant toute valeur réelle lorsque la variable décrit un intervalle ouvert de longueur π . A la borne supérieure de J , le module de x tend vers l'infini : on dit que la solution explose, ou qu'elle connaît une **mort explosive**.

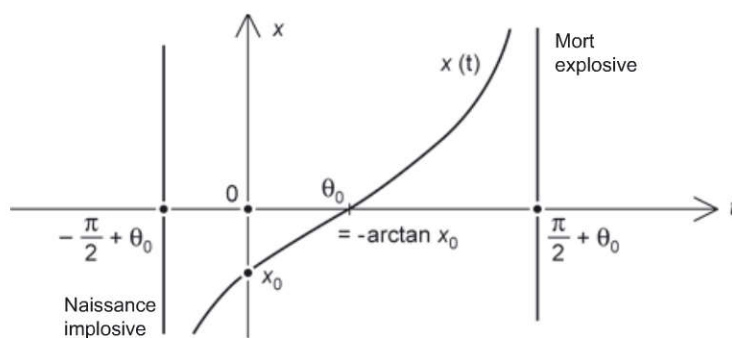


Figure 1.2 – Un système monodimensionnel explosif.

On peut aussi qualifier le comportement du système lorsque $t \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2} + \theta_0\right)^+$ de **naissance implosive**.

On peut généraliser l'emploi des deux adjectifs par les définitions suivantes, dans lesquelles $a \in \bar{\Omega}$, les temps t_i initial et t_f final, étant **finis** :

- il y a naissance implosive si $\lim_{t \rightarrow t_i^+} \|x(t)\| = +\infty$;

- il y a mort explosive si $\lim_{t \rightarrow t_f^-} \|x(t)\| = +\infty$;
- il y a naissance explosive si $\lim_{t \rightarrow t_i^+} \|x(t) - a\| = 0$ et $\lim_{t \rightarrow t_i^+} \|\dot{x}(t)\| = +\infty$;
- il y a mort implosive si $\lim_{t \rightarrow t_f^-} \|x(t) - a\| = 0$ et $\lim_{t \rightarrow t_f^-} \|\dot{x}(t)\| = +\infty$.

On trouvera un exemple bidimensionnel de ces deux derniers cas en exercice 8.1, placé au chapitre 8 car on se situe alors hors de $\mathbb{R}^2$.

Le paragraphe 1.2.3 traitera *a contrario* d'un système, linéaire de surcroît (l'oscillateur harmonique), qui, lorsque t croît de $-\infty$ à $+\infty$, prend des valeurs appartenant à un ensemble borné.

Problème 1.1 Un critère de mort explosive

Aucun système $\dot{x} = f(x)$ linéaire (donc avec f polynôme homogène de degré 1) n'explose, mais le système unidimensionnel $\dot{x} = x^2$ a une mort explosive. Le but de l'exercice est de mieux dessiner les limites entre ces deux types de comportement. Tous les systèmes évoqués dans l'exercice sont localement lipschitziens.

1. On considère le système $\dot{x} = x^\alpha$, où $x \in \Omega = \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
 - (a) Donner pour $\alpha \neq 1$ (le cas $\alpha = 1$ correspondant au cas classique d'un système linéaire) l'expression analytique de la solution $x(t)$ obtenue pour $x(0) = x_0$.
 - (b) Montrer que pour $\alpha > 1$, le système connaît une mort explosive à un instant $t_f(x_0)$ qu'on exprimera en fonction de x_0 et α .
2. On considère le système $\dot{x} = x(\ln x)^\beta$, où $x \in \Omega =]1, +\infty[$ et $\beta \in \mathbb{R}$.
Discuter l'existence d'une mort explosive en fonction des valeurs de β .
3. Gardant $\Omega =]1, +\infty[$, on considère maintenant le système $\dot{x} = x^\alpha (\ln x)^\beta$, où α et β sont des réels quelconques.
 - (a) Pour $x_0 \in \Omega$, identifier $\text{Orb}^+(x_0)$ (partie d'orbite correspondant à $t \geq 0$).
 - (b) Généraliser au nouveau système considéré les résultats des questions précédentes.
 - (c) Proposer une application à des systèmes d'ordre n quelconque.

Une conséquence importante du théorème de Cauchy-Lipschitz

Deux orbites distinctes sont disjointes (ne se coupent pas), ce qu'on énonce parfois « deux trajectoires ne se coupent jamais ». En effet, si deux orbites ont un point commun, on les reconstitue grâce au théorème de Cauchy de façon unique à partir de ce point. Ceci n'exclut pas un schéma de trajectoires du type suivant, qu'il convient simplement d'interpréter correctement.

Ce schéma ne représente pas deux fragments de trajectoires qui se coupent en E , mais cinq fragments de trajectoires : C_1 , C_2 , C_3 , C_4 et E . Ce dernier est ce que nous appellerons un **équilibre** (f est nulle en ce point) et constitue à lui seul une trajectoire.

C_1 (resp. C_2) peut faire partie de la même orbite que C_3 (resp. C_4) si ces deux fragments se raccordent.

Le nombre d'orbites représentées est en tout état de cause supérieur à 2.

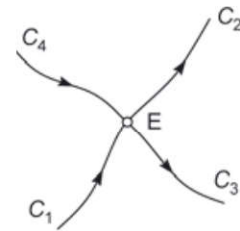


Figure 1.3 -

Exercice 1.5 Classe C^1 et Lipschitz

Montrer qu'une fonction f de classe C^1 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ est localement lipschitzienne.

1.2.2 Compléments sur les espaces de t , de x et de $\dot{x}$

Espace de t : nous avons vu que pour un état initial donné x_0 , il existe une plage temporelle $J(x_0)$ de définition du temps, intervalle ouvert contenant 0. Mais on peut aussi imposer une condition du type $x(t_0) = x_0$ avec $t_0 \neq 0$. Nous noterons alors $J(t_0, x_0)$ la plage temporelle. Dans ce cas là, l'« état initial » au sens strict $x(0)$ peut ne pas exister. Par exemple, pour le système $\dot{x} = 1 + x^2$, la condition $x(2) = 0$ conduit à $J(t_0, x_0) = J(2, 0) =]2 - \pi/2, 2 + \pi/2[$, qui ne contient pas le temps nul : on a donc une naissance à un instant strictement positif, et l'on peut sans difficulté imaginer un exemple exhibant une mort à un instant strictement négatif.

Espace de x : nous avons déjà remarqué que dans le cas du pendule simple, x , variable angulaire, n'appartient pas à $\mathbb{R}$ mais à l'ensemble des réels définis modulo 2π : cet ensemble a la topologie du cercle et non celle de la droite : c'est une **variété différentielle** de dimension 1 et non un ouvert de $\mathbb{R}$. Pour toute modélisation à n variables d'état dont au moins l'une est un angle, Ω sera une variété de dimension n et non un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Nous en verrons quelques exemples au chapitre 8. Notons qu'une liberté courante de langage peut amener à désigner comme « vecteur d'état » le n -uplet définissant l'état.

Espace de $\dot{x}$: si $x \in \mathbb{R}^n$, on a aussi $\dot{x} \in \mathbb{R}^n$. Mais si ce n'est pas le cas, par exemple si x est (ou contient) un angle, il reste possible de définir une dérivée $\dot{x} \in \mathbb{R}^n$ moyennant un formalisme adéquat, que nous évoquerons en annexe 2.

Dans le cas où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, une autre question se pose : de quelle structure doit-on munir $\mathbb{R}^n$? Au sens strict, $\mathbb{R}^n$ est un espace **vectoriel**. Mais dans de nombreux cas (exemple : $\dot{x} = 1$ sur $\Omega = \mathbb{R}$), aucun point de Ω n'a un statut privilégié et la structure d'espace **affine** est plus naturelle. Bien souvent encore, essentiellement quand

on traite de questions de nature topologique (continuité, limite), la structure d'espace *topologique* suffit. À l'opposé de cette logique, on peut légitimement munir Ω d'une structure *euclidienne*. Par exemple, dans le cas de l'oscillateur harmonique (premier exemple du § 1.2.3), il existe une structure euclidienne de l'espace des états pour laquelle les orbites sont des cercles, ce qui offre l'avantage de renforcer la compréhension du système en exploitant notre intuition géométrique.

1.2.3 Deux exemples

1) Un exemple linéaire : l'oscillateur harmonique

Nous avons déjà introduit au paragraphe 1.1 l'oscillateur harmonique, dont l'équation est :

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

Pour $\omega = 1$, cette équation traduit l'orthogonalité des vecteurs x et $\dot{x}$ dans le plan de phases. Ceci implique que les trajectoires sont des cercles de centre 0. Le retour à un ω quelconque se traduit pour les trajectoires par une affinité, qui transformera donc les cercles en ellipses. Le point 0, qui constitue en lui-même une orbite, est ici appelé **centre** ou **point elliptique**, ainsi qu'on le verra plus loin lors de l'étude des équilibres.

Retenons donc que pour l'oscillateur harmonique, les trajectoires dans l'espace d'état sont des ellipses de centre 0, toutes décrites avec la même période $2\pi/\omega$.

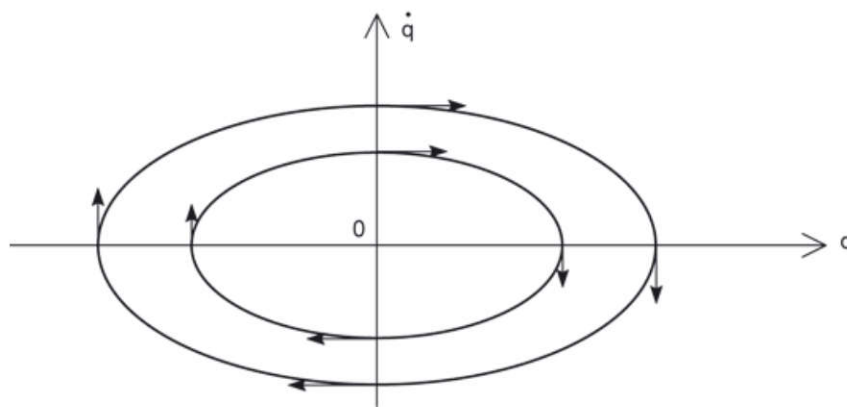


Figure 1.4 - Oscillateur harmonique.

Portrait de phases de l'oscillateur harmonique : l'abscisse représente la position q de la masse oscillante, l'ordonnée sa vitesse $\dot{q}$ (que nous avons nommées ξ et $\dot{\xi}$ au paragraphe 1.1).

2) Un exemple non-linéaire : le pendule simple

Un pendule simple non amorti repéré par l'angle θ d'écart de sa tige (rigide) par rapport à la verticale descendante, a une énergie totale constante. Ceci se traduit, T représentant l'énergie cinétique et V l'énergie potentielle, par :

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgz = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_T + \underbrace{mgl(1 - \cos \theta)}_V = Cte$$

(m étant la masse, v sa vitesse, l la longueur de la tige de masse nulle), soit encore :

$$\frac{1}{2}ml^2 \dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta = Cte,$$

d'où par dérivation par rapport au temps :

$$ml^2 \cdot \dot{\theta} \cdot \ddot{\theta} + mgl \sin \theta \dot{\theta} = 0.$$

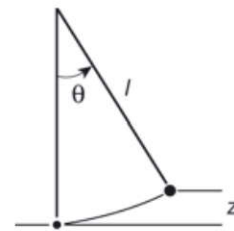


Figure 1.5 - Le pendule.

Cette équation se simplifie et devient : $\ddot{\theta} = -(g/l) \sin \theta$, soit encore $\ddot{\theta} = -\sin \theta$ en unités convenables. Ici aussi, l'espace des états est de dimension 2.

$$\text{Avec } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}, \text{ on obtient } \dot{x} = f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\sin x_1 \end{pmatrix}$$

Remarque

Dans le cas où les forces appliquées à une masse ponctuelle dérivent d'un potentiel, l'équation fondamentale de la dynamique est du type :

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = -\nabla V(q)$$

avec $q \in \mathbb{R}$ (cas de l'oscillateur harmonique ou du pendule simple), ou $q \in \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ (cas d'une masse ponctuelle dans un champ de gravitation, ou d'une charge électrique dans un champ électrique, ou plus généralement $q \in \mathbb{R}^n$). La procédure d'extension d'états vue au paragraphe 1.1 conduit alors à ajouter au vecteur $q \in \mathbb{R}^n$ le vecteur vitesse $\dot{q} \in \mathbb{R}^n$, pour former un vecteur d'état $(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Le système est dit **conservatif**, ce terme signifiant la conservation au cours du temps de l'énergie totale, ou hamiltonien. Nous donnerons plus loin une interprétation supplémentaire de l'adjectif « conservatif ». Le champ des vecteurs d'état est dit **hamiltonien**, notion sur laquelle nous reviendrons au chapitre 6.

- Pour l'oscillateur harmonique, l'équation déjà vue :

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = -\omega^2 q \quad \text{s'écrit aussi} \quad \frac{d^2 q}{dt^2} = -\nabla V(q) \quad \text{avec} \quad V(q) = \frac{(\omega \cdot q)^2}{2}$$

- Pour le pendule simple également, on a bien une équation du type $\frac{d^2 q}{dt^2} = -\nabla V(q)$ avec $q = \theta$ et, moyennant un choix approprié des unités physiques, $V(q) = -\cos q$.

1.2.4 Excursion momentanée loin de Lipschitz

Le caractère localement lipschitzien de f est la « ligne jaune » au-delà de laquelle on peut perdre l'unicité de la solution, et où tout devient donc plus complexe. C'est donc l'hypothèse minimale que l'on fait généralement dans l'étude des systèmes. On fait même très souvent l'hypothèse que f est de classe C^k ($k \geq 1$), qui implique le caractère localement lipschitzien de f (voir exercice 1.5) et permet d'établir de nouveaux résultats impliquant les dérivées.

Exercice 1.6 Des trajectoires sécantes

On considère le système $\dot{x} = 2\sqrt{|x|}$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$.

Montrer que ce système admet une infinité de solutions telles que :

$$x_0 = x(0) = 0.$$

En d'autres termes, il existe une infinité de trajectoires qui se coupent au point $(t, x) = (0, 0)$.

Exercice 1.7 L'unicité de la trajectoire n'exige pas Lipschitz

Le théorème de Cauchy nous indique que si le système $\dot{x} = f(x)$ est tel que f soit localement lipschitzienne, tout couple (t, x) appartient à une trajectoire unique.

Le but de l'exercice est de montrer par un exemple simple que la condition imposée à f n'est pas nécessaire pour assurer l'unicité de l'orbite contenant x . Soit le système $\dot{x} = 1 + \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(x)$, où $x \in \mathbb{R}$.

1. Vérifier que f n'est pas lipschitzienne.
2. Montrer que tout couple $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ appartient à une trajectoire unique définie pour tout temps réel.

L'exercice suivant met à jour un curieux phénomène : une simple roue peut effectuer un nombre entier de tours, puis s'arrêter pour une durée *arbitraire*, repartir pour une nouvelle série de tours, s'arrêter à nouveau, et poursuivre indéfiniment cette étrange errance. Malgré son apparent libre arbitre, ce système mécanique respecte rigoureusement son équation d'évolution.

Problème 1.2 Quand Lipschitz n'est pas là, les trajectoires dansent

Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on considère un axe horizontal Ox et un axe vertical descendant Oy . Un cercle matériel Γ sans masse de rayon 1 et de centre I roule sans glisser sur la droite Ox , à laquelle il est tangent en J . Il ne peut se déplacer (ce que certains mécanismes sans frottement permettent) que vers la droite (les « x » croissants).

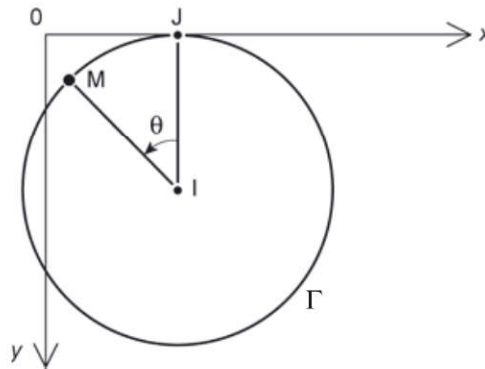


Figure 1.6 - La cinématique de M .

Ce cercle, soumis à la liaison indiquée, est à l'instant initial $t = 0$ tangent à Ox en O . Il porte sur sa circonférence une masse ponctuelle unité située en M qui lui est solidaire ; $M = O$ à $t = 0$. Le dispositif est placé dans un champ gravitationnel $\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc dirigé vers le bas.

La position de Γ (donc de M) est définie par l'angle $\theta = (\vec{IJ}, \vec{IM}) \in \mathbb{R}$, repéré positivement lorsque J est sur la demi-droite Ox . Le couple $(\theta(t), \dot{\theta}(t))$ détermine l'état à l'instant t .

1. Exprimer en fonction de θ et $\dot{\theta}$ la position $\vec{OM}$ et la vitesse $\vec{V}$ de M .
2. On se place désormais dans le cas où $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$ pour $t = 0$.
Montrer que la constance de l'énergie totale (énergie cinétique + énergie potentielle) entraîne $\dot{\theta} = 1$ pour $\theta \neq 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
3. Montrer que l'état du système ainsi réduit à la dimension 1 peut être représenté soit par θ seul, soit par x seul.
4. Ecrire l'équation du système sous la forme $\dot{x} = f(x)$. Montrer que f est continue, mais non localement lipschitzienne.
5. Identifier les équilibres et leur nature. Tracer un portrait de phases, et montrer qu'il existe une infinité de trajectoires telles que $x(0) = 0$.
Quelle est la nature des orbites de M dans le plan Oxy ?

1.3 SYMÉTRIES ORBITALES

L'identification des symétries du système $\dot{x} = f(x)$ (où $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$) en facilite l'analyse. La symétrie peut concerner seulement les orbites, mais aussi la façon dont elles sont décrites, comme on le précise ci-après.

Appelons A un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$, dont la dimension est comprise entre 0 (A est alors un point) et $n - 1$ (A est alors un hyperplan), et désignons par $\widehat{a}$ le symétrique de a par rapport à A . Nous adoptons cette convention, que a soit un point, une partie de Ω ou un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

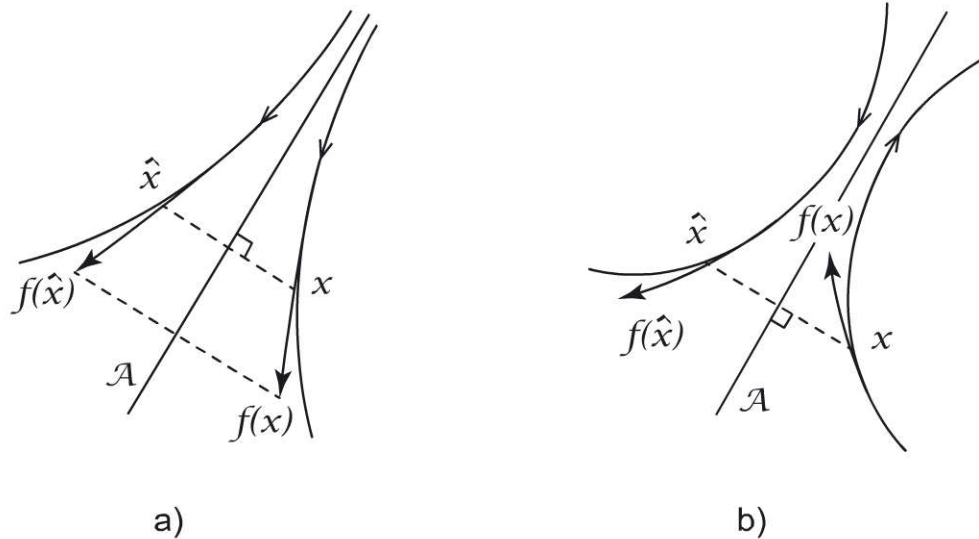


Figure 1.7 – Symétries orbitales.

a) flot symétrique

b) flot antisymétrique.

Supposons que Ω soit symétrique par rapport à A (c'est-à-dire $\widehat{\Omega} = \Omega$) et que l'ensemble des éléments de contact (les directions de $f(x)$) des orbites soit symétrique par rapport à A , en d'autres termes que $f(\widehat{x}) \parallel f(x)$; nous écartons, au prix d'une éventuelle restriction de Ω , le cas des équilibres. Alors, pour tout x dans Ω , *l'orbite du symétrique est le symétrique de l'orbite* : $Orb(\widehat{x}) = \widehat{Orb(x)}$.

On dira qu'il y a **symétrie orbitale**. Les symétries orbitales peuvent être classées selon trois cas :

- **Premier cas : symétrie du flot** : $\forall x \in \Omega, f(\widehat{x}) = f(x)$. Il y a alors conjugaison des trajectoires par symétrie, au sens suivant : $\phi(\widehat{x}, t) = \widehat{\phi(x, t)}$ pour tout t appartenant à la plage temporelle de x (figure 1.7a). Les descendants du symétrique sont les symétriques des descendants. On a la même assertion pour les ascendants (les notions de descendant et d'ascendant, dont le sens intuitif nous suffit ici, seront définies plus tard).

Exemple

Si $A = 0 \in \mathbb{R}^n$, on a $\widehat{x} = -x$. Donc, pour tout système linéaire, $f(\widehat{x}) = f(-x) = -f(x) = \widehat{f(x)}$: tout système linéaire présente donc une symétrie orbitale par rapport à l'origine, avec symétrie du flot.

• **Deuxième cas : antisymétrie du flot** : $\forall x \in \Omega, f(\widehat{x}) = -\widehat{f(x)}$. Il y a alors « anti conjugaison » des trajectoires par symétrie, au sens suivant : $\phi(\widehat{x}, t) = \widehat{\phi(x, -t)}$ pour t et $-t$ appartenant à la plage temporelle de x (figure 1.7b). Les descendants du symétrique sont les symétriques des ascendants et réciproquement.

On peut aussi dire que, si $\widetilde{\phi}$ représente le flot du **système miroir** ($\widetilde{f}(x) = -f(x)$), on a symétrie des flots : $\phi(\widehat{x}, t) = \widehat{\phi(x, -t)} = \widetilde{\phi(x, t)}$

Exemples

1. $f(x) = |x|$ pour $\Omega = \mathbb{R}$: il y a antisymétrie du flot entre $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$ pour $A = \{0\}$.
2. dans le cas de l'oscillateur harmonique ($\Omega = \mathbb{R}^2$), il y a antisymétrie du flot pour toute orbite circulaire dans la symétrie par rapport à toute droite A passant par l'origine.

• **Troisième cas : autres situations** : il peut naturellement y avoir symétrie orbitale sans conjugaison ni anticonjugaison du flot.

Exemple

Soit $\dot{x} = x + x^3 \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(x)$ (où $x \in \mathbb{R}$) ; $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ sont des orbites symétriques par rapport au point $A = 0$. Mais la conjugaison de trajectoire, qui existe, n'est pas une symétrie : en raison du terme en x^3 , le mouvement centrifuge est plus accentué sur $\mathbb{R}_+$, où il y a mort explosive (voir le problème 1.1) contrairement à ce qui se passe sur $\mathbb{R}_-$.

FLOT ET CONJUGAISON EN TEMPS CONTINU

2

2.1 FLOT D'UN SYSTÈME DYNAMIQUE

Le **flot** d'un système dynamique est l'application qui à un état initial x_0 fait correspondre l'état atteint à l'instant t , où t peut être positif ou négatif. Cette notion, qui va être précisée ci-après, privilégie donc le point de vue « évolution à partir d'une condition initiale ». Notons que la simple expression « l'état à l'instant t » suppose que cet état est bien défini. Le théorème de Cauchy l'affirme moyennant l'hypothèse que le système est localement lipschitzien, hypothèse que naturellement nous faisons ici.

2.1.1 Définition du flot d'un champ de vecteurs

On note $\phi(t, x_0)$ l'état à l'instant t du système d'état initial x_0



Figure 2.1 - Représentation du flot.

$\phi(t, x_0)$ est donc l'application qui à tout état initial x_0 fait correspondre son devenir ou son passé à l'instant t . La famille d'applications $(t, x) \mapsto \phi(t, x)$ parfois notée $(\Phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est le **flot** du système. Comme le système est autonome, c'est-à-dire stationnaire, le schéma suivant équivaut au précédent pour tout s réel :



Figure 2.2 - Illustration de la stationnarité.

Remarques et résultats

1. $\phi(t, x)$ n'a de sens que pour $t \in J(x)$, ce qui implique l'appartenance du couple (t, x) à un domaine spatio-temporel D de $\mathbb{R} \times \Omega$. On a vu par exemple au paragraphe 1.2.1 que pour le système $\dot{x} = 1 + x^2$, la plage temporelle $J(x)$ est bornée inférieurement (naissance implosive) et supérieurement (mort explosive).

En pratique, $J(x)$ est le plus grand intervalle permettant à $\phi(t, x)$:

- soit de rester dans Ω ;
- soit tout simplement d'être défini.

Dans tous les cas, on veillera à l'appartenance de (t, x) à son domaine de définition, qui est souvent $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ (temps illimité dans le passé et le futur), $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ (temps illimité dans le futur), ou $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ (temps illimité dans le futur et x confiné à un domaine Ω de $\mathbb{R}^n$).

2. La notation $x(t)$ sous-entend $x(0) = x_0$. C'est donc un raccourci pour désigner

$$\phi(t, x_0) ; \quad \dot{x} = f(x) \text{ s'écrit donc aussi : } \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{[x(t, x_0)]}_{\phi(t, x_0)} = \underbrace{f[x(t, x_0)]}_{\phi(t, x_0)}$$

$$\text{En d'autres termes, } \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x_0) = f[\phi(t, x_0)],$$

$$\text{En notation abrégée : } \boxed{\frac{\partial \phi}{\partial t} = f \circ \phi}$$

3. La stationnarité du système se traduit par la **transitivité** du flot.

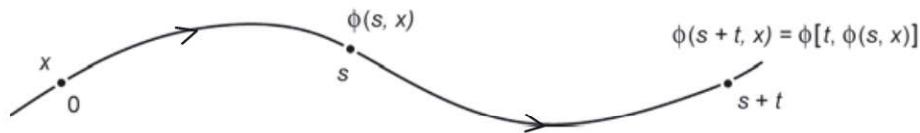


Figure 2.3 - La transitivité du flot.

Un simple examen du schéma conduit à l'expression de la transitivité :

$$\boxed{\phi(s+t, x) = \phi[t, \phi(s, x)]}$$

Attention : selon le contexte, la notation x représentera soit un état, soit une fonction du temps.

4. On appellera **ascendant** de x tout point $\phi(t, x)$ de Ω correspondant à $t \leq 0$, et **descendant** de x tout point $\phi(t, x)$ de Ω correspondant à $t \geq 0$.

2.1.2 Continuité du flot

La régularité du flot du système $\dot{x} = f(x)$ défini sur le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est liée à la régularité de f . On trouvera la démonstration du premier résultat ci-après dans les ouvrages consacrés aux équations différentielles.

Caractère localement lipschitzien du flot

Si f est localement lipschitzienne sur l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, alors :

- le domaine de définition du flot ϕ du système $\dot{x} = f(x)$ est un ouvert $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R} \times \Omega$;
- l'application $(t, x) \in \mathcal{D} \mapsto \phi(t, x) \in \Omega$ est localement lipschitzienne ;
- si de plus f est de classe C^k , le flot ϕ est lui-même de classe C^k .

Si f est lipschitzienne sur Ω , ce résultat se précise par une inégalité qui montre le caractère au plus exponentiel de la divergence de deux trajectoires au cours du temps.

Inégalité de Gronwall

Si f est lipschitzienne de rapport λ sur le domaine Ω de $\mathbb{R}^n$, alors pour tous $x_0 \in \Omega$ et $y_0 \in \Omega$, on a en tout instant $t \geq 0$: $\|\phi(t, x_0) - \phi(t, y_0)\| \leq \|x_0 - y_0\| e^{\lambda t}$.

Dans l'inégalité, il est nécessaire que $\phi(t, x_0)$ et $\phi(t, y_0)$ aient un sens. Donc, « en tout instant ≥ 0 » signifie $\forall t \in J = J(x_0) \cap J(y_0) \cap \mathbb{R}_+$.

Pour montrer l'inégalité de Gronwall, rappelons que pour toute fonction vectorielle dérivable, la dérivée du module est majorée par le module de la dérivée. Appliquons cette remarque à la fonction $t \in J \mapsto l(t) = \phi(t, x_0) - \phi(t, y_0)$, qui représente l'éloignement à l'instant t des trajectoires issues respectivement de x_0 et y_0 . Il vient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|l(t)\| &\leq \left\| \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x_0) - \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, y_0) \right\| = \|f[\phi(t, x_0)] - f[\phi(t, y_0)]\| \\ &\leq \lambda \|\phi(t, x_0) - \phi(t, y_0)\| \text{ car } f \text{ est } \lambda\text{-lipschitzienne} \\ &= \lambda \|l(t)\| \end{aligned}$$

D'où $\frac{d}{dt} \|l(t)\| - \lambda \|l(t)\| \leq 0$. Après multiplication des deux membres par $e^{-\lambda t}$, on obtient $e^{-\lambda t} \frac{d}{dt} \|l(t)\| - \lambda e^{-\lambda t} \|l(t)\| \leq 0$, c'est-à-dire $\frac{d}{dt} [e^{-\lambda t} \|l(t)\|] \leq 0$.

La fonction $t \mapsto e^{-\lambda t} \|l(t)\|$ étant donc décroissante, on a $e^{-\lambda t} \|l(t)\| \leq e^0 \|l(0)\|$, d'où $\|l(t)\| \leq \|l(0)\| e^{\lambda t}$. Comme $l(0) = \|x_0 - y_0\|$, on reconnaît dans ce dernier résultat l'inégalité de Gronwall. C.Q.F.D.

- **à t fixé** : $(x_0, y_0) \mapsto \|\phi(t, x_0) - \phi(t, y_0)\| \leq C \|x_0 - y_0\|$. Il y a donc continuité spatiale du flot par rapport aux conditions initiales : si x_0 et y_0 sont proches, leurs images $x(t) = \phi(x_0, t)$ et $y(t) = \phi(y_0, t)$ le sont aussi. L'application est même lipschitzienne de rapport C , mais ceci à t fixé. La constante de Lipschitz $C = e^{\lambda t}$ croît exponentiellement avec le temps. On a malgré tout une majoration de la sensibilité d'une trajectoire aux conditions initiales.
- **à x_0 fixé** : on sait depuis le paragraphe 2.1.1 que $t \mapsto x(t) = \phi(t, x_0) \in \Omega$ a pour dérivée $\frac{\partial \phi}{\partial t} = f \circ \phi$ et est donc localement lipschitzienne, *a fortiori* continue. On se reportera aussi à l'alinéa « compacité des segments d'orbite » placé après les remarques.

Remarques

1. Si f est de classe C^1 et si $\|\nabla f\|$ (norme euclidienne de l'endomorphisme ∇f) est bornée sur Ω par λ , alors f est lipschitzienne de rapport λ sur Ω et l'inégalité s'applique.
2. On peut remarquer que pour $f(x) = \lambda x \in \mathbb{R}^n$, avec $\lambda > 0$, on a l'expression explicite du flot : $\phi(t, x_0) = x_0 e^{\lambda t}$. Alors, $\phi(t, x_0) - \phi(t, y_0) = (x_0 - y_0) e^{\lambda t}$, d'où $\|\phi(t, x_0) - \phi(t, y_0)\| = \|x_0 - y_0\| e^{\lambda t}$: l'inégalité de Gronwall devient une égalité.
3. Dans l'exemple $\dot{x} = 1 + x^2$ étudié au paragraphe 1.2.1, f est localement lipschitzienne sur $\Omega = \mathbb{R}$, mais n'y est pas lipschitzienne. Aussi, a-t-on dans ce cas explosion de la solution à un horizon temporel fini : il n'y a pas de majoration exponentielle de $\|\phi(t, x_0) - \phi(t, y_0)\|$ et l'inégalité de Gronwall ne s'applique pas. Elle s'applique en revanche si on choisit pour Ω un intervalle ouvert borné de $\mathbb{R}$.
4. Le mathématicien suédois Grönwall a démontré en 1919 un lemme généralisant la présente inégalité. Lui-même orthographiait son nom sans tréma dans ses publications, usage que nous respectons dans ce livre.

Connexité des orbites

Notations : pour tout point x de Ω , on notera $Orb(x)$ l'orbite de x , c'est-à-dire l'ensemble $\{\phi(t, x) ; t \in J(x)\}$, c'est-à-dire encore la réunion des ascendants et des descendants de x .

La plage temporelle $J(x)$ de x est un intervalle de $\mathbb{R}$ et est donc connexe. $Orb(x)$ est l'image du connexe $J(x)$ par le flot, qui est continu. Donc $Orb(x)$ est connexe. On notera donc que *toute orbite est connexe*.

Compacité des segments d'orbite

On notera $Orb^-(x)$ et $Orb^+(x)$ respectivement les parties passée (les ascendants de x) et future (les descendants de x) de l'orbite, soit : $Orb^-(x) = \{\phi(t, x) ; t \in J(x) \cap \mathbb{R}_-\}$ et $Orb^+(x) = \{\phi(t, x) ; t \in J(x) \cap \mathbb{R}_+\}$. Ainsi, $Orb^-(x) \cap Orb^+(x)$ contient au moins le point $\phi(0, x) = x$.

On appellera **segment d'orbite** l'ensemble des points de $Orb(x)$ correspondant à $t \in [a, b]$, où a et b sont deux éléments de $J(x)$. Comme $[a, b]$ est compact et comme le flot est continu, un segment d'orbite, image continue d'un compact, est compact. On retiendra que *tout segment d'orbite est compact*.

Si la trajectoire $t \mapsto x(t)$ est T -périodique (on dira alors aussi que son orbite est périodique), $Orb(x)$ est l'image continue de $[0, T]$ et est donc compact : *toute orbite périodique est compacte*.

2.1.3 Flot d'un système linéaire

Lorsque le champ de vecteurs $f(x)$ dépend linéairement de l'état x , il définit un **système dynamique linéaire**. Le caractère linéaire du système se traduit par $f(x) = Ax$, A étant la matrice du système linéaire.

2.2. Conjugaison des systèmes dynamiques

Le flot est explicite : il met en jeu une *exponentielle de matrice* :

$$x(t) = e^{At} x_0, \text{ d'où } \boxed{\phi(t, x) = e^{At} x}$$

Ceci explique le rôle central de la matrice A dans l'étude à venir de la **stabilité** des systèmes linéaires.

Trois rappels : comme désormais nous rencontrerons souvent des exponentielles de matrices, il est utile de rappeler trois résultats :

- l'exponentielle d'une matrice réelle ou complexe s'obtient comme somme de la même série formelle que pour un scalaire, et converge toujours.
- $e^{A+B} = e^A e^B$ est faux en général, mais vrai si A et B commutent. Voir l'exercice 2.1.
- $\frac{d(e^{At})}{dt} = A e^{At} = e^{At} A$

Exercice 2.1 Exponentielle de matrice

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Vérifier que e^{A+B} , $e^A \cdot e^B$ et $e^B \cdot e^A$ sont trois matrices distinctes.

Revisitons dans le cas d'un système **linéaire** les trois remarques et résultats du paragraphe 2.1.1 :

1. t appartient à $\mathbb{R}$ (on peut choisir t aussi loin que l'on désire dans le passé ou l'avenir) ou à $\mathbb{R}_+$ si on s'intéresse seulement à l'avenir, et $x \in \mathbb{R}^n$.
2. L'équation $\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) = f[\phi(t, x)]$ se vérifie aisément :
 - 1^{er} membre = $A e^{At} x$
 - 2^e membre = $A \phi(t, x) = A e^{At} x$
3. La transitivité $\phi(s+t, x) = \phi[t, \phi(s, x)]$ se vérifie facilement aussi :
 - 1^{er} membre = $e^{A(s+t)} x$
 - 2^e membre = $e^{At} \phi(s, x) = e^{At} e^{As} x = e^{A(s+t)} x$

2.2 CONJUGAISON DES SYSTÈMES DYNAMIQUES

2.2.1 Généralités sur la conjugaison

Nous rappelons qu'en l'absence d'hypothèses contrares explicites, on suppose localement lipschitziens les systèmes considérés. Cette hypothèse assure l'existence des flots.

Soient S_1 et S_2 deux systèmes dynamiques définis sur les domaines respectifs Ω_1 et Ω_2 de $\mathbb{R}^n$.

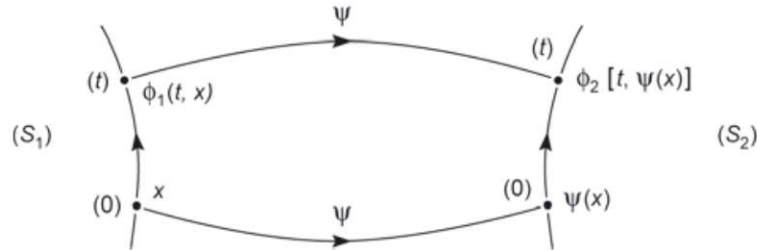


Figure 2.4 – Schéma de la conjugaison.

ψ étant un homéomorphisme (bijection bicontinue) de Ω_1 sur Ω_2 , et t un instant appartenant à l'intersection $J(x)$ des plages temporelles de x et de $\psi(x)$, on définit ainsi la conjugaison :

$$S_1 \text{ est conjugué à } S_2 \text{ par } \psi \iff \forall x \in \Omega_1, \forall t \in J(x), \phi_2[t, \psi(x)] = \psi[\phi_1(t, x)]$$

En notation abrégée : $\phi_2 \circ \psi = \psi \circ \phi_1$. Cette égalité doit être vérifiée :

- pour tout x appartenant à Ω_1 ;
- pour tout t (une fois x choisi) appartenant à $J(x)$, ce qui implique que les états $\phi_1(t, x)$ et $\phi_2[t, \psi(x)]$ sont bien définis (et appartiennent donc respectivement à Ω_1 et Ω_2).

On dit aussi que S_1 et S_2 sont **topologiquement** conjugués par ψ .

Si S_1 et S_2 sont définis par $\dot{x} = f_1(x)$ et $\dot{x} = f_2(x)$, on dit encore que **les champs f_1 et f_2 sont conjugués**.

Si ψ est un difféomorphisme de classe k (c'est-à-dire : ψ et ψ^{-1} continûment différentiables), on dit que S_1 et S_2 sont **conjugués de classe k** par ψ .

Remarques

1. Homéomorphisme et flots commutent au sens suivant : $\phi_2 \circ \psi = \psi \circ \phi_1$
2. On peut exprimer la conjugaison ainsi, remarquant que le flot traduit la « généalogie » des états :

descendant du transformé = transformé du descendant
et
ascendant du transformé = transformé de l'ascendant

Considérons maintenant deux systèmes S_1 et S_2 conjugués de classe 1.

Dérivons par rapport au temps les deux membres de la relation de conjugaison $\phi_2[t, \psi(x)] = \psi[\phi_1(t, x)]$, en utilisant $\partial\phi/\partial t(t, x) = f[\phi(t, x)]$ (§ 2.1.1).

2.2. Conjugaison des systèmes dynamiques

1^{er} membre : $\frac{\partial}{\partial t} \phi_2[t, \psi(x)] = f_2[\phi_2(t, \psi(x))]$

qui, pour $t = 0$, vaut $f_2[\phi_2(0, \psi(x))] = f_2[\psi(x)]$

2^e membre : appelons $\nabla\psi$ la différentielle (dérivée spatiale) de ψ

(matrice $n \times n$ dont l'élément (i, j) est $\partial\psi_i/\partial x_j$).

La dérivée du 2^e membre par rapport au temps est :

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi[\phi_1(t, x)] = \nabla\psi \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial t}(t, x) \right]$$

qui, pour $t = 0$, vaut $\nabla\psi[f_1(\phi_1(0, x))] = \nabla\psi[f_1(x)]$.

Égalant les deux, on a donc : $f_2[\psi(x)] = \nabla\psi[f_1(x)]$.

Le lecteur pourra établir la réciproque :

- tout d'abord en dérivant l'hypothèse $f_2[\psi(x)] = \nabla\psi[f_1(x)]$ par rapport au temps ;
- puis en vérifiant que les conditions d'une conjugaison sont bien remplies.

Par conséquent :

$$S_1 \text{ et } S_2 \text{ conjugués de classe 1} \iff \forall x \in \Omega_1, f_2[\psi(x)] = \nabla\psi[f_1(x)]$$

Résumons les deux caractérisations de la conjugaison :

$$S_1 \text{ et } S_2 \text{ conjugués de classe 0} \iff \phi_2 \circ \psi = \psi \circ \phi_1$$

$$S_1 \text{ et } S_2 \text{ conjugués de classe 1} \iff f_2 \circ \psi = \nabla\psi \circ f_1$$

Remarques

1. La conjugaison **ne conserve pas la linéarité**, ou peut au contraire l'introduire (ce qui revient au même en raison de la symétrie de la définition). On en verra des exemples dans la suite.
2. Le calcul de dérivation de $\frac{\partial}{\partial t} \psi[\phi_1(t, x)]$ ci-avant se suffit à lui-même. En voici toutefois un développement en écriture matricielle. En notant ψ_k , ϕ_{1k} et f_{1k} les k -ièmes composantes respectives de ψ , ϕ_1 et f_1 , la dérivée cherchée a pour i -ième composante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi_i[\phi_1(t, x)] = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} \underbrace{\frac{\partial \phi_{11}}{\partial t}(t, x)}_{f_{11}[\phi_1(t, x)]} + \dots + \frac{\partial \psi_i}{\partial x_n} \underbrace{\frac{\partial \phi_{1n}}{\partial t}(t, x)}_{f_{1n}[\phi_1(t, x)]}$$

Pour $t = 0$, $\phi_1(t, x) = x$. D'où $\frac{\partial}{\partial t} \psi_i(x) = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} f_{11}(x) + \dots + \frac{\partial \psi_i}{\partial x_n} f_{1n}(x)$

$$\text{On a donc : } \frac{\partial \psi(x)}{\partial t} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \psi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11}(x) \\ \vdots \\ f_{1n}(x) \end{pmatrix},$$

qui est le vecteur $(\nabla\psi \circ f_1)(x)$

Exercice 2.2 Conjugaison centrifuge – centripète

Soit le système S_1 d'équation d'évolution $\dot{x} = x$ (trajectoires centrifuges), avec $x \in \Omega_1 = \mathbb{R}^*$. (On notera que Ω , ouvert non connexe, n'est pas un domaine)

1. Vérifier que le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique.
Soit $x_0 \in \Omega_1$. Expliciter par les moyens élémentaires classiques la solution satisfaisant $x(0) = x_0$, et déterminer sa plage temporelle $J(x_0)$.
2. Recenser les orbites du système S_1 . Que devient ce recensement pour le système Σ de même équation, mais étendu à $x \in \mathbb{R}$?
3. Soit S_2 le système d'équation d'évolution $\dot{x} = -x$ (trajectoires centripètes), avec $x \in \Omega_2 = \mathbb{R}^*$.
 - (a) Exprimer les flots $\phi_1(t, x)$ et $\phi_2(t, x)$.
 - (b) Soit ψ l'application $x \in \Omega_1 \mapsto \psi(x) = \frac{1}{x} \in \Omega_2$.
Sachant que $\Omega_1 = \Omega_2$, vérifier que $\psi \circ \psi$ est l'identité de Ω_1 (et Ω_2), et que ψ est un homéomorphisme.
 - (c) Montrer que S_1 et S_2 sont conjugués par ψ .
4. **Généralisation à $\mathbb{R}^n - \{0\}$** : on définit toujours S_1 par $\dot{x} = x$ sur Ω_1 et S_2 par $\dot{x} = -x$ sur Ω_2 , avec désormais $\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{R}^n - \{0\}$
 - (a) Exprimer les flots $\phi_1(t, x)$ et $\phi_2(t, x)$.
 - (b) Soit ψ l'application $x \in \Omega_1 \mapsto \psi(x) = \frac{x}{\|x\|^2} \in \Omega_2$.
Sachant que $\Omega_1 = \Omega_2$, vérifier que $\psi \circ \psi$ est l'identité de Ω_1 (et Ω_2), et que ψ est un homéomorphisme.
 - (c) Montrer que S_1 et S_2 sont conjugués par ψ .

2.2.2 Conjugaison des systèmes linéaires semblables

Le système régi par $\dot{x} = f(x)$ est **linéaire** si et seulement si, on l'a vu précédemment, il est de la forme $\dot{x} = A x$, où A est une matrice $n \times n$.

Deux systèmes linéaires $\dot{x} = A x$ et $\dot{y} = B y$ de même dimension n sont **semblables** si les matrices A et B sont semblables, c'est-à-dire si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases (éventuellement identiques) de $\mathbb{R}^n$, la matrice de changement de base étant P , avec $B = P^{-1} A P$.

(Rappelons que la relation de similitude « A est semblable à B » est une relation d'équivalence)

2.2. Conjugaison des systèmes dynamiques

Soient donc deux systèmes linéaires S_1 et S_2 de matrices respectives A et B .

$$(B = P^{-1} A P)$$

Considérons alors l'homéomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \psi(x) = P^{-1} x$.

Vérifions la condition établie au paragraphe précédent : $\nabla \psi \circ f_1 = f_2 \circ \psi$

$$\begin{aligned} 1^{er} \text{ membre} : \nabla \psi \circ f_1 &= P^{-1} \circ f_1, \text{ car } x \mapsto \psi(x) = P^{-1} x \text{ est linéaire} \\ &= P^{-1} A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^{e} \text{ membre} : f_2 \circ \psi &= B \circ \psi \\ &= B P^{-1} \end{aligned}$$

On a $P^{-1} A = B P^{-1}$ car $B = P^{-1} A P$.

Par conséquent, la condition de conjugaison est satisfaite. Donc :

Si A et B , matrices d'évolution des systèmes linéaires S_1 et S_2 , sont semblables avec $B = P^{-1} A P$, alors S_1 et S_2 sont conjugués par l'homéomorphisme $\psi = P^{-1}$.

Remarques

1. La conjugaison de systèmes linéaires par similarité est de classe infinie.
2. La similitude de A et B est une condition suffisante de conjugaison des deux systèmes. Nous avons vu (exercice 2.2) et confirmerons plus loin qu'elle n'est pas nécessaire : deux systèmes linéaires non semblables peuvent être conjugués. En fait, la conjugaison est une notion très souple et les orbites de deux systèmes conjugués peuvent être d'aspects très différents.

2.2.3 Transformation d'un système par difféomorphisme

Considérons le système $\dot{x} = f(x)$ avec $x \in \Omega$, domaine de $\mathbb{R}^n$, et f localement lipschitzienne.

Une bijection ψ suffisamment régulière de Ω sur $\psi(\Omega)$, domaine de $\mathbb{R}^n$, permet de définir un nouveau système, transformé du système initial (figure 2.5). Plus précisément, on suppose que ψ est un **difféomorphisme de classe C^1** , c'est-à-dire une bijection qui, de même que sa réciproque ψ^{-1} , est continûment différentiable.

$$\begin{aligned} \text{Posons} \quad g &= \nabla \psi \circ f \circ \psi^{-1} \quad \text{c'est-à-dire :} \\ \forall y \in \psi(\Omega), \quad g(y) &= \nabla \psi(x) (f(x)), \text{ où } x = \psi^{-1}(y) \end{aligned}$$

Alors, le champ g , appelé **image directe du champ f par ψ** , est lui-même de classe C^1 sur le domaine $\psi(\Omega)$, donc localement lipschitzien.

Comme $g = \nabla \psi \circ f \circ \psi^{-1}$, on a $g \circ \psi = \nabla \psi \circ f$, ce qui, nous l'avons vu au paragraphe 2.2.1, caractérise le fait que les systèmes d'états respectifs x et y définis par les équations d'évolution $\dot{x} = f(x)$ et $\dot{y} = g(y)$ sont **conjugués de classe 1 par ψ** .

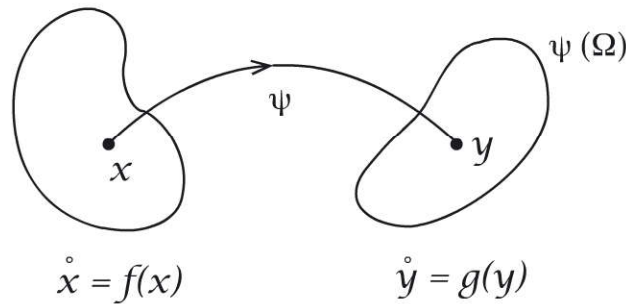


Figure 2.5 – Changement de paramétrage.

Donc, si $t \mapsto x(t)$ est une trajectoire du système initial, $t \mapsto y(t) = (\psi \circ x)(t)$ est une trajectoire du système $\dot{y} = g(y)$.

On peut s'exprimer différemment, en se rapprochant du vocabulaire des physiciens ou des mécaniciens, en disant que le difféomorphisme ψ est un **changement de paramétrage**, expression dans laquelle on désigne par paramètres les grandeurs constitutives de l'état. Ainsi, d'après ce qui précède, on associe à tout changement de paramétrage une conjugaison, ce qui s'accorde avec l'intuition. Nous retiendrons :

Changement de paramétrage (par difféomorphisme)

Soit le système $\dot{x} = f(x)$ localement lipschitzien sur $x \in \Omega$ domaine de $\mathbb{R}^n$ et ψ un difféomorphisme de Ω sur $\psi(\Omega)$. Alors, le système $\dot{y} = g(y)$ défini sur $\psi(\Omega)$ par $g = \nabla\psi \circ f \circ \psi^{-1}$ est **conjugué de classe 1** par ψ du système $\dot{x} = f(x)$.

Avant d'en traiter un exemple, un rappel pratique est utile. Le résultat s'établit sans difficulté en utilisant la série de l'exponentielle d'une matrice :

$$\text{si } \Lambda = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \text{ alors } e^{\Lambda} = e^a \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}$$

Exemple du champ hélicoïdal

Nota : par souci de lisibilité, on représentera dans ce paragraphe les vecteurs en jeu indifféremment par des vecteurs-lignes ou des vecteurs-colonnes.

On considère le champ hélicoïdal dans $\mathbb{R}^3$, dans lequel tout état « spirale » autour de l'axe vertical à vitesse angulaire constante et vitesse verticale constante : c'est par exemple le champ de vitesse du solide défini par le rotor principal d'un hélicoptère en ascension verticale uniforme, si on assimile dans ce cas très particulier le rotor à un solide indéformable (ce qui n'est plus le cas en translation horizontale).

2.2. Conjugaison des systèmes dynamiques

C'est aussi le champ de vitesse du solide « tire-bouchon » obtenu lorsque, bouteille et bouchon restant fixes, on retire le tire-bouchon en le dévissant vers le haut.

Nota : nous *restreignons* convenablement le domaine Ω d'appartenance de (x, y, z) pour éviter tout problème de détermination de θ et pour que le passage en coordonnées cylindriques (voir le flot n° 2) soit bijectif et régulier (difféomorphisme).

Flot n° 1

L'équation d'évolution de l'état (x, y, z) est :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ d'où } \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } \dot{z} = 1 \text{ (système } S_1 \text{)}.$$

Non-additif à cause de l'équation $\dot{z} = 1$, ce système n'est donc pas linéaire.

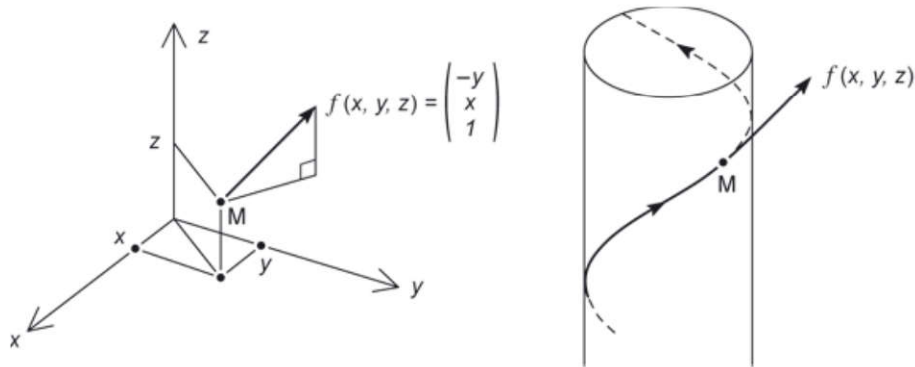


Figure 2.6 - Une trajectoire hélicoïdale.

Le système S_1 s'intègre analytiquement :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Posant $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = r_0 \begin{pmatrix} \cos \theta_0 \\ \sin \theta_0 \end{pmatrix}$ avec $r_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\theta_0 \in]-\pi, +\pi]$, il vient, compte tenu du fait que z s'intègre en $z(t) = z_0 + t$:

$$\boxed{\phi_1(t, x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} r_0 \cos(t + \theta_0) \\ r_0 \sin(t + \theta_0) \\ z_0 + t \end{pmatrix}}$$

- $(x_0, y_0, z_0) \mapsto \phi(t, x_0, y_0, z_0)$ est un déplacement de $\mathbb{R}^3$, produit (commutatif) d'une translation de vecteur $(0, 0, t)$ et d'une rotation d'angle t autour de Oz .
- Les orbites sont portées par des hélices circulaires de pas 2π et d'axe Oz .

Flot n° 2

Grâce au choix de Ω , l'application $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \psi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan(y/x) \\ z \end{pmatrix}$ est un difféomorphisme de Ω dans une partie de $\underbrace{\mathbb{R}_+^*}_r \times \underbrace{]-\pi, +\pi[}_\theta \times \underbrace{\mathbb{R}}_z$.

L'équation $(\dot{r}, \dot{\theta}, \dot{z}) = f_2(r, \theta, z)$ du système, noté S_2 avec nos nouvelles coordonnées (cylindriques), peut alors s'obtenir grâce à la relation de conjugaison des systèmes S_1 et S_2 : $\nabla\psi[f_1(x)] = f_2[\psi(x)]$. De sa résolution, qui fait l'objet de l'exercice 2.3, on déduit que **f_2 est constant** :

$$f_2(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ ce qui correspond au flot : } \boxed{\phi_2(t, r_0, \theta_0, z_0) = \begin{pmatrix} r_0 \\ \theta_0 + t \\ z_0 + t \end{pmatrix}}$$

Exercice 2.3 Détermination d'un flot conjugué

Le système hélicoïdal S_1 a pour équation d'évolution $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (-y, x, 1)$, noté ici $f_1(x, y, z)$. L'application $(x, y, z) \mapsto \psi(x, y, z) = (r, \theta, z)$ précédemment définie est un difféomorphisme de classe C^∞ car on a choisi pour cela le domaine Ω_1 d'appartenance de (x, y, z) .

1. Exprimer la matrice $\nabla\psi$ en fonction de (r, θ, z) .
2. Notant $(\dot{r}, \dot{\theta}, \dot{z}) = f_2(r, \theta, z)$ l'équation d'évolution du système (alors noté S_2) en coordonnées cylindriques, déterminer f_2 à partir de la condition de conjugaison $\nabla\psi[f_1(x)] = f_2[\psi(x)]$ (voir § 2.2.1).
3. Intégrer l'équation obtenu et donner l'expression analytique du flot $\phi_2(t, r_0, \theta_0, z_0)$ du système S_2 .

Mais on pouvait dans cet exemple particulier opérer plus simplement, car l'analyse cinématique nous fournit immédiatement l'évolution de l'état (r, θ, z) : en effet, r est constant et θ et z ont chacun 1 pour dérivée par rapport au temps.

D'où le champ associé au flot ci-dessus : $f_2(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On retrouve bien le

champ constant, donc non-linéaire, déjà évoqué. On notera que la notion « champ constant » n'est pas conservée par conjugaison.

Flot n° 3

À partir du paramétrage cylindrique, on peut définir un 3^e paramétrage encore plus

simple : $\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \\ u = \theta - z \\ z \end{pmatrix}$. On a alors : $\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{u} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\text{Le flot est } \phi_3(t, r_0, u_0, z_0) = \begin{pmatrix} r_0 \\ u_0 \\ z_0 + t \end{pmatrix}$$

On a **redressé** le champ initial en le conjuguant à un champ non seulement constant mais égal au vecteur unitaire associé à l'un des axes de coordonnées. Ce résultat se généralise : on peut toujours, hors d'un équilibre, conjuguer un système de dimension n au système $\dot{x} = (0, \dots, 0, 1)$. Ce résultat général constitue le **théorème du redressement**, qui fait l'objet du § 2.3.1.

Flot n° 4

À partir du 3^e paramétrage, on peut définir un 4^e paramétrage donnant l'équation d'évolution linéaire la plus simple possible.

Soit $v = e^z$ (donc, $v \in \mathbb{R}_+^*$) et gardons les paramètres r et u .

Alors, $\dot{v} = \dot{z} e^z = v$ et $v(t) = v_0 e^t$

$$\text{On a alors : } \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} r \\ u \\ v \end{pmatrix} : \text{ce nouveau système est } \textit{linéaire}.$$

Cette propriété n'est que locale car $v = 0$ (qui conduirait à un équilibre alors que le système initial en est dépourvu) est à écarter, v étant une exponentielle.

$$\text{Le flot est } \phi_4(t, r_0, u_0, v_0) = \begin{pmatrix} r_0 \\ u_0 \\ v_0 e^t \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} r_0 \\ u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} : \text{ nous retrouverons souvent}$$

cette dernière forme, commune à tous les systèmes linéaires.

2.3 QUELQUES PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DU FLOT

2.3.1 Théorème du redressement

Nous ne détaillerons pas la démonstration de ce théorème qui utilise le théorème des fonctions implicites. Il s'énonce ainsi :

Théorème du redressement

Soit un système $\dot{x} = f(x)$ défini pour $x \in \Omega$, domaine de $\mathbb{R}^n$. Si $f \in C^1(\Omega)$ et si $f(x_1) \neq 0$, alors dans un voisinage de x_1 , le champ f est localement conjugué de classe 1 à un champ constant.

On peut choisir comme champ constant le champ :
 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x) = (0, 0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$. Nous avons rencontré ce champ dans le flot n° 3 illustrant, pour $n = 3$ le champ hélicoïdal (§ 2.2.3).

Ce théorème signifie que « *tous les points réguliers se valent* », au sens suivant :

- Un point **régulier** est un point en lequel la fonction d'évolution (f ou analogue) est non-nulle, en opposition avec un **équilibre**, en lequel $f = 0$. Nous reviendrons sur ces notions importantes en début du chapitre 3.
- Si x et y sont des points réguliers d'un même système ou de deux systèmes de même dimension, il existe une conjugaison dans laquelle x et y sont homologues.

Cela signifie aussi que, tout au moins localement, une éventuelle richesse de comportement du flot ne saurait être espérée qu'au voisinage des équilibres. Et c'est bien ce que montre la suite de cet ouvrage : non seulement le flot au voisinage d'un équilibre peut avoir des physionomies très diverses, mais il est impossible d'en faire un recensement exhaustif. Dans ce livre, nous ne saurons classer les équilibres que si ceux-ci ont la propriété particulière d'être *hyperboliques*, notion qui sera définie en temps utile.

2.3.2 Flot d'un système dynamique sur une variété invariante

Une variété de dimension p , notion brièvement évoquée déjà au paragraphe 1.2.2, est un ensemble homéomorphe par morceaux à une boule de $\mathbb{R}^p$. La définition rigoureuse impose des conditions de régularité aux raccords (intersections de morceaux) comme on le précise en annexe 2.

Exemples

1. Un cercle est une variété de dimension 1 : deux morceaux (on dira « cartes ») suffisent à le recouvrir.
2. Une sphère est une variété de dimension 2 ; deux cartes suffisent aussi.
3. Un tore est une variété de dimension 2 ; la génération d'un tore par un rectangle deux fois retourné sur lui-même donne l'idée d'un recouvrement par 4 cartes (les 4 rectangles séparés par les médianes du rectangle initial, élargis pour se recouvrir). On en trouvera le détail en annexe 2, paragraphe « variétés ».

• Un ensemble A , partie de Ω , est **invariant par le flot** si pour tout $x \in A$ et tout $t \in J(x)$, on a $\phi(t, x) \in A$. En d'autres termes : tous ascendants et descendants de x appartiennent à A . On pourra dire aussi, plus simplement, que A est **invariant**. Si on se limite à $t \geq 0$, on dit que A est **positivement invariant** (sous-entendu : par le flot) : tous descendants de x sont dans A .

Si l'ensemble A est une variété, on peut restreindre l'étude du système dynamique de flot ϕ à A . Et, si la dimension de A est inférieure à n , on dispose d'un sous-système plus simple que le système initial.

Deux remarques au sujet des variétés invariantes :

- une orbite est en général une variété de dimension 1 invariante par le flot ; l'exception des « tores irrationnels » sera évoquée dans la question 4 du problème 8.1 et au § 11.3.1 ;
- si le système est régi par un champ hamiltonien, les variétés iso-hamiltonien sont invariantes par le flot. On se reportera à la notion de système conservatif : classique en mécanique, cette notion sera à nouveau évoquée au § 6.2.2.

Le flot hélicoïdal étudié en section précédente fournit quelques exemples simples de variétés invariantes de dimension 1 (hélices circulaires) ou 2 (cylindres de révolution, nappes hélicoïdales évoquant des « vis d'Archimède », etc.).

2.3.3 Flot des systèmes conservatifs et dissipatifs

Il est instructif d'analyser l'évolution d'un volume de l'espace d'état. Soit donc K un compact de Ω de mesure V dans $\mathbb{R}^n$. On établit le théorème suivant, dont on peut donner cette approche intuitive que nous enseigne l'aérodynamique : la divergence du champ de vitesses d'un écoulement fluide est la dérivée logarithmique par rapport au temps du volume massique. Une divergence positive traduit une dilatation, une divergence négative une contraction (voir la remarque 4 ci-après).

Théorème de la divergence

Soit $\dot{x} = f(x)$ un système de classe C^1 , et $V(t)$ le volume dans $\mathbb{R}^n$ du transformé d'un compact K par le flot du système.

$$\text{Alors, } \dot{V}(t)_{t=0} = \int_K \text{Div } f \, dx$$

L'établissement de ce théorème classique requiert seulement l'utilisation d'un développement limité et d'un changement de variables pour l'intégration dans $\mathbb{R}^n$.

Remarques

1. Le théorème traduit une intégration sur un volume fini de l'égalité « divergence = dilatation volumique ».
2. $x \in K_0$ devient à l'instant t le point $\phi(t, x)$. Donc, $V(t)$ est le volume du compact $K_t = \bigcup_{x \in K_0} \phi(t, x)$. On peut noter de façon imagée $K_t = \phi(t, K_0)$.
3. Si la divergence est constante de valeur D , alors :
 $\dot{V} = \int_K D \, dx = D \int_K dx = D.V$; on a $\frac{d(\ln V)}{dt} = D$, ce que l'on rapprochera de la remarque 1, qui en constitue la version ponctuelle : $\boxed{\frac{d(\ln v)}{dt} = \text{Div } f}$, équation dans laquelle v est le volume massique, inverse de la masse volumique.
4. Les termes « dilatation » et « contraction » utilisés ci-dessus se rapportent à une mesure dans $\mathbb{R}^n$, mais non à des longueurs : car une dilatation (ou contraction) nulle au sens volumique, c'est-à-dire une divergence nulle, peut s'accompagner d'une dilatation linéaire dans une direction et une contraction dans une autre.

Un système qui conserve les volumes (donc pour lequel $\text{Div } f = 0$) est dit **conservatif**. Nous avons donné un sens différent à ce qualificatif au § 1.2.3. Nous verrons plus loin en quoi les deux sens se rejoignent.

Si $\dot{V} < 0$, le système est dit **dissipatif**. Nous évoquerons dans un autre chapitre le fait qu'un système physique dans lequel existent des frottements voit son énergie mécanique diminuer et correspond alors à $\text{Div } f < 0$.

3.1 INTRODUCTION

Soit un système $\dot{x} = f(x)$, avec f localement lipschitzienne de $E = \mathbb{R}^n$ dans lui-même.

Définitions

x_0 est un **équilibre** si et seulement si $f(x_0) = 0$.

x_1 est un **point régulier** s'il n'est pas un équilibre, c'est-à-dire si et seulement si $f(x_1) \neq 0$.

Un équilibre est encore appelé point fixe, ou point d'équilibre, ou point stationnaire, parfois point critique.

Si x_0 est un équilibre, $x(t) = x_0$ pour tout $t \geq 0$ est une solution du système, ce qui justifie les adjectifs « fixe » et « stationnaire ».

Dans le cas d'un système **linéaire** $f(x) = Ax$, l'ensemble des équilibres $f^{-1}(0) = \text{Ker } A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$; il contient toujours le point 0.

Remarquons que la seule analyse physique du pendule pesant montre (même avant d'écrire les équations du système) qu'il constitue un système non-linéaire car il possède plusieurs équilibres isolés.

Il résulte du théorème de Cauchy-Lipschitz que ***tout équilibre x_0 est une orbite***. Et nulle orbite autre que $\{x_0\}$ ne contient ce point. Si tel n'était pas le cas, on pourrait atteindre ou quitter x_0 en un temps fini. On retiendra que, pour un système localement lipschitzien :

on ne peut ni atteindre ni quitter un équilibre en un temps fini.

Les équilibres sont donc à la fois des citadelles imprenables et des prisons d'où l'on ne s'évade pas. Mais cette constatation reste liée au caractère localement lipschitzien de f . Si on abandonne cette hypothèse, tout devient possible comme l'ont montré l'exercice 1.6 et le problème 1.2.

3.2 STABILITÉ DES ÉQUILIBRES : EXEMPLE ET DÉFINITIONS

3.2.1 Exemple du pendule et définitions

L'exemple suivant est celui d'un système non-linéaire simple, qui sera analysé de manière plus détaillée dans un chapitre ultérieur. Les définitions qu'on va donner sont générales : elles se rapportent à tous les systèmes, ***linéaires ou non***.

Soit un pendule pesant, modélisé par un point matériel rattaché au point de suspension par une tige rigide sans masse : le point matériel peut donc occuper toute position, basse ou haute. Son état est représenté par un vecteur de $\mathbb{R}^2$ regroupant sa position angulaire et sa vitesse angulaire. Le pendule est amorti ou non.

La définition d'un équilibre permet déjà d'identifier pour le système « pendule » deux équilibres, ceci en présence ($\gamma > 0$) ou non ($\gamma = 0$) d'un amortissement γ : l'équilibre bas (figures 3.1 gauche et centrale) et l'équilibre haut (figure 3.1 droite).

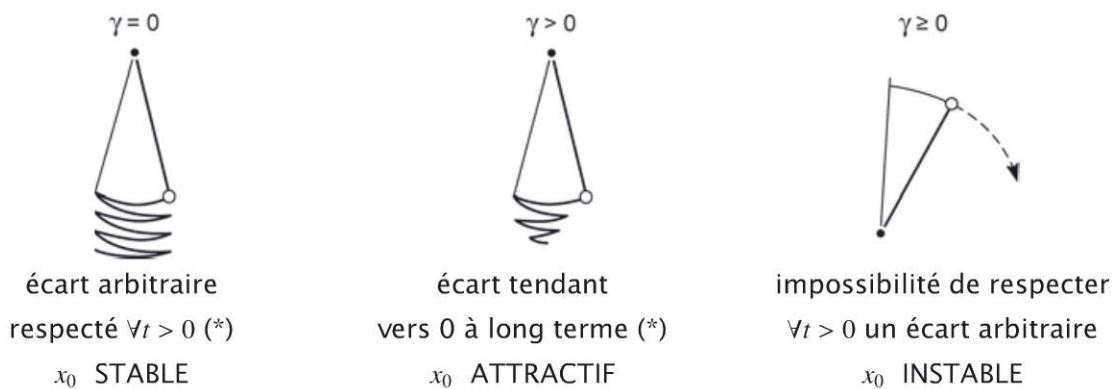


Figure 3.1 - Illustration de trois définitions.

Dans les commentaires de la figure 3.1 :

- x_0 désigne l'équilibre figuré ;
- le terme écart désigne l'écart à l'équilibre (donc $\|x - x_0\|$) ;
- le symbole (*) signifie « moyennant un choix convenable de l'écart initial ».

Ces trois exemples constituent un bon support intuitif pour les définitions suivantes.
 x_0 étant un équilibre de S :

x_0 stable	$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0, \ x - x_0\ \leq \eta \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+, \ \phi(t, x) - x_0\ < \varepsilon$
x_0 attractif	$\iff \exists \eta > 0, \ x - x_0\ \leq \eta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, x) = x_0$
x_0 répulsif	$\iff \exists \eta > 0, \ x - x_0\ \leq \eta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t, x) = x_0$
x_0 asymptotiquement stable	$\iff x_0$ stable et attractif
x_0 instable	$\iff x_0$ non stable

Remarques

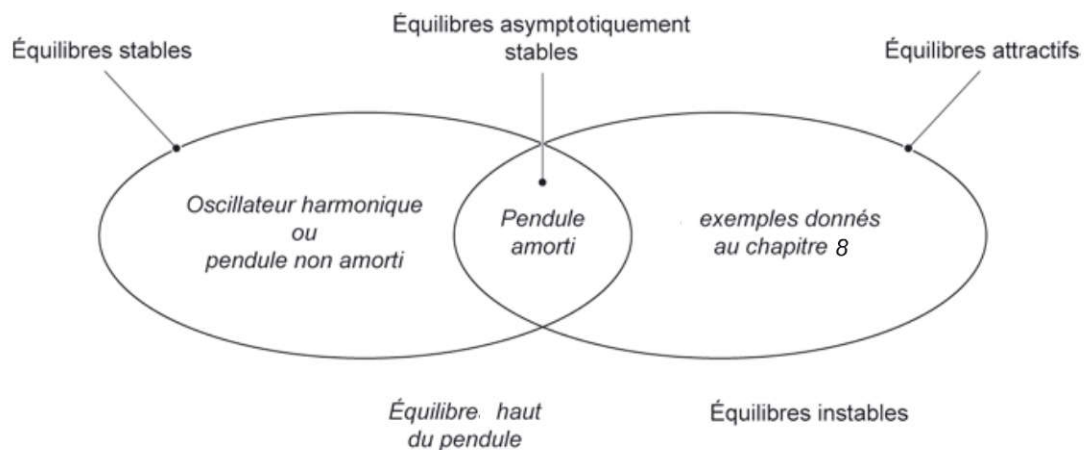
1. Si la plage temporelle de x est limitée, on remplacera les symboles ∞ et $-\infty$ dans l'encadré ci-dessus par les temps respectifs t_f de mort explosive et t_i de naissance implosive.
2. La stabilité (simple ou asymptotique) met en jeu **tous les temps** futurs, alors que l'attractivité ne met en jeu que le **long terme**. Ceci éclaire la remarque suivante.

3.2. Stabilité des équilibres : exemple et définitions

3. La stabilité asymptotique entraîne la stabilité par définition.
En revanche, la seule propriété d'attractivité :
 - entraîne la stabilité asymptotique si S est linéaire ;
 - mais **ne l'entraîne pas** si S est non-linéaire. Nous en donnerons un premier exemple au § 3.2.3.
4. Dans certains documents, l'équilibre que nous venons de définir comme attractif est appelé asymptotiquement stable et n'est donc pas nécessairement stable. On veillera donc aux définitions adoptées.
5. Le caractère répulsif (resp. attractif) de l'équilibre x_0 pour le système $\dot{x} = f(x)$ équivaut à son caractère attractif (resp. répulsif) pour le système $\dot{x} = -f(x)$, déjà évoqué au § 1.3 sous le nom de **système miroir**.
6. Un équilibre stable et non asymptotiquement stable est aussi dit équilibre **indifférent**, ou encore **simplement stable**.
7. On utilise souvent les préfixes ω et α pour désigner le comportement de l'état lorsque t tend respectivement vers $+\infty$ et $-\infty$.
Ainsi, ce que nous appelons équilibre asymptotiquement stable est parfois appelé équilibre asymptotiquement ω -stable. De même, nous désignerons par $\omega(x)$ l'ensemble-limite de x , notion définie au § 7.1).

3.2.2 Classification élémentaire des équilibres

La classification élémentaire des équilibres selon les qualificatifs qu'on vient de définir répond au diagramme suivant, dans lequel quelques exemples sont donnés en italique.



La suite montrera qu'on peut, moyennant des hypothèses convenables, affiner la classification en considérant le système linéarisé autour d'un équilibre, système dont l'*indice* (défini au paragraphe 4.2.3) est une propriété importante.

3.2.3 Attractivité, stabilité et répulsivité : quels rapports ?

- **Attractivité et stabilité** : nous verrons au chapitre suivant, ce qui d'ailleurs est assez intuitif, qu'un équilibre attractif a d'un système **linéaire** est stable. Mais en

est-il ainsi pour un système quelconque ? Nous savons déjà que sur $\Omega = \mathbb{R}$, la réponse est **positive**. En effet, toute orbite étant un intervalle, l'attractivité est représentée localement par un portrait de phases du type suivant, qui traduit la stabilité :



Mais à partir de la dimension 2, la réponse devient **négative**. Sur $\Omega = \mathbb{R}^2$, nous pouvons l'illustrer par ... des points d'interrogation, ceci en référence à la forme de certaines des orbites.

La figure 3.2 montre à cette fin un portrait de phases d'un système plan comportant un équilibre attractif instable, le point A. Parmi les modélisations possibles d'un tel système, on peut proposer celle-ci :

- le cercle unité Γ ainsi que tous cercles qui lui sont tangents intérieurement en A (voir figure), une fois privés de A, sont des orbites ;
- à l'extérieur de Γ , les trajectoires proviennent de l'infini dans la direction asymptotique de Ox , contournent le cercle Γ dans le sens direct, enfin tendent vers A tangentielllement à Ax ;
- la demi-droite ouverte Ax est une orbite ;
- en tout point M du plan, le module de la vitesse est égal à la distance $\|AM\|$ du point à A. Ce dernier est donc un équilibre ;
- les sens de parcours des orbites sont indiqués sur la figure 3.2.

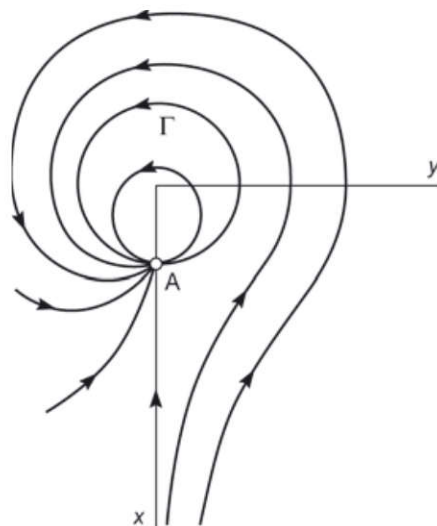


Figure 3.2 - Un équilibre attractif instable.

À l'extérieur du disque unité, les orbites ont l'allure de points d'interrogation. Le portrait de phases montre que l'équilibre est **attractif instable**.

• Attractivité et répulsivité

Par définition, stabilité et instabilité s'excluent. En revanche, malgré l'antinomie des deux adjectifs « attractif » et « répulsif », les deux notions ne sont pas exclusives : un même équilibre peut être *attractif et répulsif*, ce qui est le cas dans l'exemple 4 ci-après. En fait les quatre cas imaginables sont possibles.

Exemples

1. Soit $\Omega = \mathbb{R}$, et $\dot{x} = x^2$; l'équilibre 0 n'est *ni attractif ni répulsif* ;
2. Soit $\Omega = \mathbb{R}$, et $\dot{x} = -x$; l'équilibre 0 est *attractif* mais n'est *pas répulsif* ;
3. Soit $\Omega = \mathbb{R}$, et $\dot{x} = x$; l'équilibre 0 est *répulsif* mais n'est *pas attractif* ;
4. Dans le chapitre « flots hors de $\mathbb{R}^n$ », on évoquera le mouvement du pendule à vitesse haute nulle. Le flot correspondant possède un équilibre unique (équilibre haut), qui est *attractif et répulsif*. Dans cet exemple, le flot est de dimension 1 mais on évolue sur un cercle, donc hors de $\mathbb{R}$.

On notera que, contrairement aux notions de stabilité et d'instabilité qui sont locales, celles d'attractivité et de répulsivité sont *globales* ; elles dépendent de la configuration générale du flot. L'exemple de la figure 3.2 le montre : si en effet on restreint le flot au disque ouvert Ω de centre A et de rayon 1, certaines trajectoires quittent Ω et n'ont plus la possibilité de rallier A . Le caractère attractif de A ne survit donc pas à une restriction du flot au voisinage Ω de A choisi.

3.2.4 Ensemble $\mathcal{E}$ des équilibres

Soit le système $\dot{x} = f(x)$ avec $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ et f continue. L'ensemble des équilibres est $\mathcal{E} = f^{-1}(0)$. Pour le système linéaire $f(x) = Ax$, $\mathcal{E}$ est le noyau de A , donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Dans ce cas, 0 est le seul équilibre si et seulement si A est injectif.

Revenons au cas général. Comme f est continue, $\{0\}$ étant fermé, $\mathcal{E}$ est fermé.

La question réciproque « un ensemble fermé quelconque est-il l'ensemble des équilibres d'un certain système ? » trouve sa réponse, affirmative, dans l'exercice 3.1. On y montre que l'un au moins des systèmes répondant à la question est 1-lipschitzien. On y établit en outre d'autres propriétés de $\mathcal{E}$.

Exercice 3.1 Tout fermé peut être un ensemble des équilibres

1. Sur un ensemble E muni d'une distance d , on définit ainsi la distance d'un point $x \in E$ à une partie quelconque X de E :

$$x \in E \mapsto d(x, X) = \inf_{z \in X} d(x, z) \text{ (voir annexe 2)}$$

Montrer que, quelle que soit la partie X de E , l'application $x \in E \mapsto d(x, X) \in \mathbb{R}_+$ est lipschitzienne de rapport 1.

2. Montrer que tout ensemble X fermé de $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des équilibres d'un système lipschitzien.
3. Montrer que tout point d'accumulation d'un ensemble des équilibres $\mathcal{E}$ est un équilibre simplement stable.
4. Montrer par des exemples qu'un point isolé de $\mathcal{E}$ peut être un équilibre simplement stable ou asymptotiquement stable.

Physionomie des équilibres simplement stables

Au voisinage d'un équilibre simplement stable, les portraits de phases peuvent être très variés. Le but de ce paragraphe est simplement d'ébaucher une « galerie des portraits » qui permet de mieux saisir la nature des équilibres stables non attractifs.

Exemples

1. Pour le système $\dot{x} = 0$ dans $\mathbb{R}^n$, tout point est simplement stable. Il y a immobilité de tous les points.
2. Nous avons déjà rencontré dans $\mathbb{R}^2$ le système $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x$, qui représente par exemple l'oscillateur harmonique. L'équilibre 0 est entouré d'orbites circulaires.
3. Le système unidimensionnel $\dot{x} = f(x) = x^3 \sin^2 \frac{1}{x}$ avec $f(0) = 0$ possède une infinité d'équilibres instables. L'équilibre 0 est à la fois simplement stable et centrifuge, comme on le précise dans l'exercice 3.2.
4. Le système plan $\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot x$ correspond au cas-type n° 3 que nous verrons au § 5.2. L'ensemble des équilibres est une droite, tout point du plan rallie cette droite.
5. Pour le système plan $\begin{cases} \dot{\rho} = \rho^3 \sin \frac{1}{\rho} & \text{pour } \rho \neq 0, \\ \dot{\theta} = 1 & \text{sinon } 0 \end{cases}$, le seul équilibre est l'origine 0. Il est entouré d'une infinité de cycles concentriques, alternativement stables et instables (les cycles sont les trajectoires périodiques : ils seront évoqués au § 7.2).
6. Dans $\mathbb{R}^n$, tout fermé peut être l'ensemble $\mathcal{E}$ des équilibres d'un système : l'exercice 3.1 montre que les points d'accumulation de $\mathcal{E}$ sont nécessairement des équilibres simplement stables (voir les exemples 3 et 4 ci-avant).
7. On peut construire toutes sortes d'exemples originaux complétant les précédents. L'imagination au pouvoir!

Exercice 3.2 *Un équilibre centrifuge mais stable*

On considère le système unidimensionnel $\dot{x} = f(x) = x^3 \sin^2 \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$, et $f(0) = 0$.

1. Montrer que l'équilibre 0 est stable et centrifuge, c'est-à-dire : pour presque tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x)$ est strictement du signe de x (en d'autres termes, presque tout x s'éloigne de 0).
2. Quelle généralisation peut-on envisager ?

3.2.5 Conservation des équilibres par conjugaison

Soient S_1 et S_2 deux systèmes de dimension n conjugués par l'homéomorphisme ψ , et a un équilibre du système S_1 . Si l'on appelle ϕ_1 et ϕ_2 les flots respectifs des systèmes S_1 et S_2 , on a par définition de la conjugaison :

$\forall t \in \mathbb{R}, \phi_2[t, \psi(a)] = \psi[\phi_1(t, a)]$. Mais, a étant un équilibre, on a :

$\forall t \in \mathbb{R}, \phi_1(t, a) = a$. Par conséquent, $\forall t \in \mathbb{R}, \phi_2[t, \psi(a)] = \psi(a)$. Donc, $\psi(a)$ est un équilibre de S_2 . Ceci montre que l'homéomorphisme ψ de conjugaison transforme tout équilibre de S_1 en équilibre de S_2 . En langage abrégé « la conjugaison conserve les équilibres ».

Il résulte de la symétrie de la relation de conjugaison qu'un point régulier (c'est-à-dire qui n'est pas un équilibre) ne peut être conjugué qu'à un point régulier. En résumé et toujours en langage abrégé :

la conjugaison conserve les équilibres et les points réguliers.

L'exercice qui suit permet d'affiner ce résultat.

Exercice 3.3 *Conservation de la nature d'un point par conjugaison*

Soient deux systèmes S_1 et S_2 , définis respectivement sur Ω_1 et Ω_2 , et conjugués par l'homéomorphisme ψ . Montrer que pour tout $a \in \Omega_1$, le point a et son image $\psi(a) \in \Omega_2$ sont de même nature :

- soit tous deux réguliers ;
- soit tous deux équilibres simplement stables ;
- soit tous deux équilibres attractifs ;
- soit tous deux équilibres répulsifs ;
- soit tous deux équilibres asymptotiquement stables ;
- soit tous deux équilibres instables.

3.3 AUTRES NOTIONS

3.3.1 Stabilité d'un ensemble

Un ensemble A invariant par le flot est **stable** si et seulement si pour tout voisinage U de A , il existe un voisinage V de A tel que $\forall t \geq 0, \phi(t, V) \subset U$. On dit encore que l'ensemble est **stable au sens de Liapounov**. On constate qu'un singleton stable au sens défini ici est un équilibre stable au sens antérieurement défini, ce qui justifie l'emploi du même adjectif.

Remarque sur le vocabulaire

En mathématiques, on rencontre l'adjectif *stable* dans un autre sens : on dit d'une façon générale que X est stable par g si $g(X) \subset X$.

Cette notion s'apparente à ce que nous appelons l'invariance (prendre à cet effet $g(X) = \phi(t \geq 0, X)$) mais diffère de la stabilité au sens de Liapounov.

3.3.2 Bassin d'attraction

L'équilibre asymptotiquement stable 0 du système $\dot{x} = -x$ défini dans $\mathbb{R}^n$ attire tout point $x \in \mathbb{R}^n$. Précisément : $\forall x \in \mathbb{R}^n, \lim_{t \rightarrow \infty} d[\phi(t, x), \{0\}] = 0$, où $d[\phi(t, x), \{0\}]$ représente la distance de $\phi(t, x)$ à l'ensemble $\{0\}$. Nous généralisons ainsi cette définition : nous dirons que l'ensemble $A \subset \Omega$ **attire** l'ensemble $B \subset \Omega$ si et seulement si les descendants de tout point de B se rapprochent à une distance arbitrairement faible de A , donc si $\forall x \in B, \lim_{t \rightarrow \infty} d[\phi(t, x), A] = 0$. Si l'ensemble A attire l'un de ses voisinages, il est dit **attractif**.

On appelle **bassin d'attraction** de A et on note $Att(A)$ l'ensemble des points attirés par A , c'est-à-dire le plus grand ensemble attiré par A . Nous retrouverons cette notion au § 7.2.1 dans le cas où A est une orbite périodique.

Exemples et remarques

1. Pour tout système et tout équilibre x_0 , le bassin d'attraction de x_0 est non-vide car il comprend trivialement x_0 ; ceci vaut même pour un équilibre répulsif et/ou instable.
2. Le bassin d'attraction d'un équilibre attractif est un **voisinage** de ce point : en effet, il contient le voisinage W évoqué dans la définition des équilibres attractifs.
3. Dans $\Omega = \mathbb{R}^n$, le bassin d'attraction de l'équilibre 0 , seul équilibre du système $\dot{x} = -x$ est Ω lui-même.
4. Sur $\Omega = \mathbb{R}$, le bassin d'attraction de l'équilibre 0 , seul équilibre du système $\dot{x} = x^2$, est l'ensemble $\mathbb{R}_-$; on notera que 0 est instable et n'est pas attractif. Un équilibre non attractif x_0 peut donc posséder un bassin d'attraction contenant d'autres points que lui-même.

Exercice 3.4 *Un équilibre instable peut-il attirer tout Ω ?*

Dans un système dynamique $\dot{x} = f(x)$ sur Ω , avec f continue, un équilibre instable peut-il attirer Ω entier :

1. Pour $\Omega = \mathbb{R}$?
2. Pour $\Omega = \mathbb{R}^2$?

STABILITÉ DES SYSTÈMES LINÉAIRES

4

4.1 RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

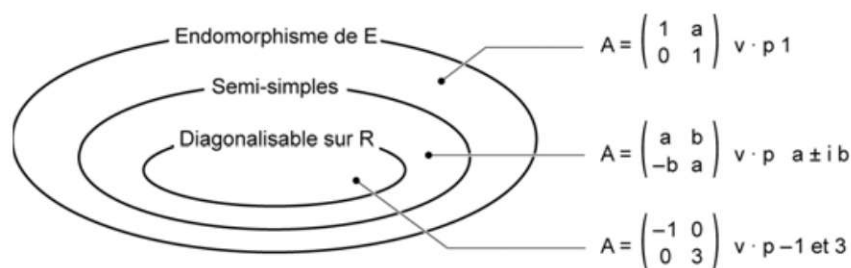
Nous avons déjà vu que les trajectoires du système linéaire

$$\dot{x} = A x \text{ sont } \textit{explicites} : x(t) = e^{At} x_0.$$

Les propriétés de $x(t)$, notamment son comportement quand $t \rightarrow \infty$, qui caractérise la stabilité du système, dépendent étroitement de e^{At} . Or, si les propriétés de l'exponentielle d'une matrice quelconque restent difficiles à appréhender, elles s'identifient en revanche très clairement si on se place dans une base convenable de $E = \mathbb{R}^n$, dans laquelle la matrice est mise sous forme alors dite réduite. Ainsi, la forme de A (nous utilisons le même symbole pour l'endomorphisme et sa matrice) devient **bloc-diagonale**. On l'appelle forme réduite de Jordan.

- Les blocs sont de dimension 1 ou 2 si A est **semi-simple**, c'est-à-dire s'il est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
- Dans le cas contraire, la dimension du plus grand bloc est au moins égale à 2.

Pour fixer les idées et pour montrer que certains endomorphismes très *simples* ne sont pourtant *pas semi-simples*, donnons un schéma sommaire des différents types d'endomorphismes, avec un exemple A pour chacun d'entre eux :



Dans ce schéma, $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ représente la « transformation du relieur » : on pensera à un livre dont la tranche, initialement rectangulaire, devient un parallélogramme après translation de sa couverture, les pages ayant glissé les unes sur les autres.

Il possède la seule valeur propre $\lambda = 1$. Le sous-espace propre correspondant est seulement de dimension 1. La matrice n'est donc pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$, mais ne l'est pas non plus dans $\mathbb{C}$.

La réduite de Jordan, évoquée ci-dessus, fait l'objet de l'annexe 4. Cette forme est adaptée à la prédiction du comportement du flot. Elle permet en particulier de connaître la nature de l'équilibre 0.

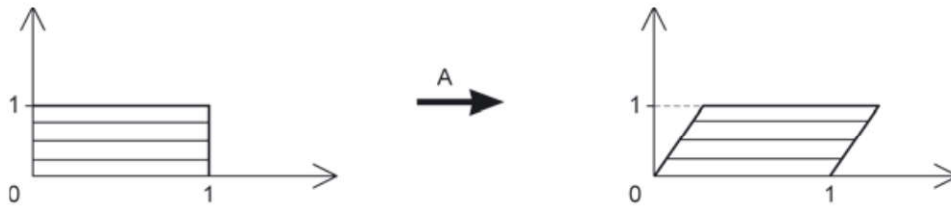


Figure 4.1 - La transformation du relieur.

4.2 FLOT ET STABILITÉ DES SYSTÈMES LINÉAIRES

Dans ce paragraphe, on utilise le fait que tout endomorphisme s'exprime, dans une base convenable, par une matrice réelle sous forme réduite de Jordan. $\mathbb{R}^n$ est muni de la structure euclidienne pour laquelle cette base est orthonormée. Ce choix justifie les remarques géométriques faites dans ce paragraphe. On y évoque en effet des cercles et des spirales logarithmiques, qui sont des notions euclidiennes.

4.2.1 Flot d'un système linéaire semi-simple

Dans une base convenable, $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_k & \\ & & \Lambda_{k+1} & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & \Lambda_q \end{bmatrix}$

avec $\Lambda_j = \begin{pmatrix} \mu_j & -\omega_j \\ \omega_j & \mu_j \end{pmatrix}$

Rappelons que $E = \mathbb{R}^n$ (avec $n = 2q - k \geq q$) est la somme directe de q sous-espaces vectoriels invariants par A : $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_q$.

Les E_i étant invariants par A , l'étude du flot se ramène à *l'étude du flot sur chacun des E_i* , donc sur des sous-espaces vectoriels de dimension 1 (associés à λ_i) ou 2 (associés à Λ_j), ainsi qu'en atteste la forme du flot :

$$x(t) = \phi(t, x_0) = e^{At} x_0 = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & e^{\lambda_k t} & \\ & & e^{\Lambda_{k+1} t} & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & e^{\Lambda_q t} \end{bmatrix} \cdot x_0$$

On a $e^{\Lambda_j t} = \exp \begin{pmatrix} \mu t & -\omega t \\ \omega t & \mu t \end{pmatrix} = e^{\mu t} \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}$, μ et ω étant bien sûr réels.

4.2. Flot et stabilité des systèmes linéaires

Notant $R(\omega t)$ cette dernière matrice qui représente une rotation plane d'angle ωt , on a $e^{\Lambda t} = e^{\mu t} R(\omega t)$.

Le flot s'exprime donc au moyen d'une matrice diagonale par blocs, les blocs étant de dimension 1 ou 2 :

$$x(t) = \phi(t, x_0) = \begin{pmatrix} \text{diag}[e^{\lambda t}] & 0 \\ 0 & \text{diag}[e^{\mu t} \cdot R(\omega t)] \end{pmatrix} \cdot x_0$$

Cette forme montre qu'au sein de chaque sous-espace E_i la stabilité de l'équilibre 0 est conditionnée par le **signe de λ ou de μ** correspondant à E_i , en d'autres termes par le signe de la partie réelle de la valeur propre.

Lorsque t tend vers l'infini, $e^{\lambda t}$ tend vers 0 si $\lambda < 0$, reste égal à 1 si $\lambda = 0$, et tend vers l'infini si $\lambda > 0$. Comme la même constatation vaut pour μ , il est naturel de définir ainsi les sous-espaces E_s , E_c et E_u :

1) E_s =sous-espace stable de A 2) E_c =sous-espace central de A 3) E_u =sous-espace instable de A	=	somme directe des sous-espaces E_i associés à des v.p. de partie réelle :	1) négative 2) nulle 3) positive
---	---	---	---

Les indices s , c et u désignent les adjectifs anglais « stable », « central » et « unstable ». Ces définitions s'appliquent aussi à un système linéaire quelconque comme on le verra au paragraphe 4.2.2.

On a naturellement : $E = E_s \oplus E_c \oplus E_u$.

Trajectoires dans les sous-espaces invariants

Les sous-espaces vectoriels invariants par A les plus simples sont de dimension 1 ou 2, ce qui permet de décrire très aisément les trajectoires correspondantes.

• Trajectoires dans $E_i \subset E_s$

- a) $\lambda < 0$ $\dim E_i = 1$ 
- $\forall x_0, x(t) = e^{\lambda t} x_0$: tend vers 0 quand $t \rightarrow \infty$
- b) $\mu < 0$ $\dim E_i = 2$

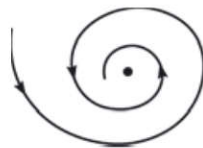


Figure 4.2 - Spirale logarithmique convergente.

$\forall x_0, x(t) = e^{\mu t} \cdot R(\omega t) x_0$: tend vers 0 quand $t \rightarrow \infty$

Dans les 2 cas, le système réduit à E_i est *asymptotiquement stable*. L'expression de $x(t)$ montre que l'argument θ de x est une fonction affine du temps et son module ρ une fonction exponentielle du temps.

Les orbites sont donc des *spirales logarithmiques*...

• **Trajectoires dans $E_i \subset E_c$**

a) $\underline{\lambda = 0}$ $\dim E_i = 1$ $\xrightarrow{\quad 0 \quad \text{tout } x \text{ immobile} \quad}$

$\forall x_0, x(t) = x_0$: il y a immobilité de x .

b) $\underline{\mu = 0}$ $\dim E_i = 2$

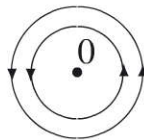


Figure 4.3 – Orbites circulaires.

$\forall x_0, x(t) = R(\omega t) x_0$: rotation uniforme autour de 0.

Dans les 2 cas, le système réduit à E_i est *stable*.

(mais pas asymptotiquement stable). Les orbites sont des *cercles*.

• **Trajectoires dans $E_i \subset E_u$**

a) $\underline{\lambda > 0}$ $\dim E_i = 1$ $\xrightarrow{\quad 0 \quad}$

$\forall x_0, x(t) = e^{\lambda t} x_0$: tend vers $\pm\infty$ quand $t \rightarrow \infty$

b) $\underline{\mu > 0}$ $\dim E_i = 2$

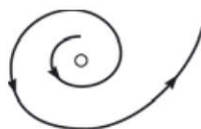


Figure 4.4 – Spirale logarithmique divergente.

$\forall x_0, \|x(t)\| = e^{\mu t} \|R(\omega t) x_0\| = e^{\mu t} \|x_0\|$ tend vers $+\infty$ avec t

Dans les 2 cas, le système réduit à E_i est *instable*.

Les orbites sont des *spirales logarithmiques*.

4.2.2 Flot d'un système linéaire quelconque

Dans une base convenable, $A = \begin{bmatrix} J_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & J_k & \\ & & & K_{k+1} \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & & K_q \end{bmatrix}$

avec $J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$ et $K_i = \begin{pmatrix} \Lambda_i & I & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & I \\ & & & \Lambda_i \end{pmatrix}$

les matrices 2×2 Λ_i et I étant $\Lambda_i = \begin{pmatrix} \mu_i & -\omega_i \\ \omega_i & \mu_i \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ces matrices peuvent comme dans le § 4.2.1 se réduire respectivement à la dimension 1×1 (scalaire λ) et 2×2 (matrice Λ). La matrice A ressortit au cas général non semi-simple si l'un au moins de ses q blocs possède effectivement une surdiagonale de 1 ou de I .

Comme dans le cas semi-simple, on a $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_q$, où E_j est le sous-espace stable associé à λ_j ou à $\mu_j \pm i\omega_j$. Les E_i étant invariants par A , l'étude du flot se ramène ici aussi à l'étude du **flot sur chacun des E_i** :

$$x(t) = \phi(t, x_0) = e^{At} x_0 = \begin{bmatrix} e^{J_1 t} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & e^{J_k t} & \\ & & & e^{K_{k+1} t} \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & & e^{K_q t} \end{bmatrix} \cdot x_0$$

Nous allons examiner les deux types d'exponentielles apparaissant dans l'expression du flot, en utilisant le fait que $e^{B+C} = e^B e^C$ si B et C commutent :

1 $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + N$, où N est nilpotente d'ordre $p = \dim J$.

Donc, $e^{Jt} = e^{\lambda t} e^{Nt} = e^{\lambda t} \cdot \underbrace{\left[I + N \frac{t}{1!} + \cdots + N^{p-1} \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} \right]}_{= P_{p-1}(Nt), \text{ matrice polynomiale de degré } (p-1) \text{ en } t}$

La forme $e^{Jt} = e^{\lambda t} \cdot P_{p-1}(Nt)$ atteste, comme dans le cas des systèmes semi-simples, l'importance du signe de λ .

Le polynôme formel $P_k(x)$ est $1 + x^1/1! + \cdots + x^k/k!$

$$\boxed{2} \quad K = \begin{pmatrix} \Lambda & I & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & I \\ & & & \Lambda \end{pmatrix} = \mu \cdot I + \left[\text{diag} \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \right] + N$$

N , nilpotente d'ordre $p = \frac{1}{2} \dim K$, est constituée de zéros à l'exception de la deuxième surdiagonale, constituée de 1. Notant toujours $R(\omega t)$ la matrice de la rotation plane d'angle ωt , on a :

$$e^{Kt} = e^{\mu t} \times (\text{diag}[R(\omega t)]) \times P_{p-1}(Nt),$$

car les trois termes matriciels de l'expression de K commutent deux à deux.

Le comportement de e^{Kt} dépend du signe de μ .

Le flot du système complet est le suivant :

$$x(t) = \phi(t, x_0) = \begin{pmatrix} \text{diag} [e^{\lambda t} P_{p-1}(Nt)] & 0 \\ 0 & \text{diag} [e^{\mu t} \cdot \text{diag}[R(\omega t)] \cdot P_{p-1}(Nt)] \end{pmatrix} \cdot x_0$$

Les espaces E_s , E_c et E_u se définissent comme dans le cas des systèmes semi-simples (§ 4.2.1), et on a toujours $E = E_s \oplus E_c \oplus E_u$.

Pour percevoir de manière plus concrète la formule donnant le flot du système complet, on pourra se reporter à l'exercice 4.1.

Exercice 4.1 Flot explicite sur un sous-espace invariant

1. Le flot d'un système linéaire quelconque dans un sous-espace E_i de dimension p associé à une valeur propre réelle λ est (§ 4.2.2, cas $\boxed{1}$) :

$$\phi(t, x_0) = e^{Jt} x_0, \text{ avec :}$$

$$e^{Jt} = e^{\lambda t} \cdot \left[I + N \frac{t}{1!} + \cdots + N^{p-1} \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} \right], \text{ où } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Expliciter matriciellement le flot sur E_i .

2. Le flot d'un système linéaire quelconque dans un sous-espace E_j de dimension $2p$ associé à deux valeurs propres complexes conjuguées $\mu \pm i\omega$ est :

$$(\S 4.2.2, \text{cas } \boxed{2}) : \phi(t, x_0) = e^{Kt} x_0, \text{ avec } K = \begin{pmatrix} \Lambda & I & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & I \\ & & & \Lambda \end{pmatrix}$$

$$\text{où } \Lambda = \begin{pmatrix} \mu & -\omega \\ \omega & \mu \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Expliciter matriciellement le flot sur E_j .

L'écrire *in extenso* pour $(\mu, \omega, p) = (-2, 5, 3)$

Trajectoires dans les sous-espaces invariants

Les sous-ensembles invariants par A sont de dimension p ou $2p$, p ayant été précédemment défini. Relativement à la stabilité, le comportement de $x(t)$ est de même nature que dans le cas semi-simple, sauf dans le sous-espace central, dans lequel l'équilibre 0 peut être stable ou instable, selon la valeur de p .

- **Trajectoires dans $E_i \subset E_s$**

a) $\lambda < 0$ $\dim E_i = p$

$$\forall x_0, x(t) = e^{\lambda t} P_{p-1}(Nt) \cdot x_0 : \text{tend vers } 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty$$

b) $\mu < 0$ $\dim E_i = 2p$

$$\forall x_0, x(t) = e^{\mu t} \cdot \text{diag}[R(\omega t)] \cdot P_{p-1}(Nt) \cdot x_0 : \text{tend vers } 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty$$

Dans les 2 cas, le système réduit à E_i est **asymptotiquement stable**.

- **Trajectoires dans $E_i \subset E_c$**

a) $\lambda = 0$ $\dim E_i = p$

$$\forall x_0, x(t) = P_{p-1}(Nt) \cdot x_0. \text{ Quand } t \rightarrow \infty :$$

- $\|x(t)\|$ reste borné si $p = 1$;
- $\|x(t)\| \rightarrow +\infty$ si $p > 1$

b) $\mu = 0$ $\dim E_i = 2p$

$$\forall x_0, x(t) = \text{diag}[R(\omega t)] \cdot P_{p-1}(Nt) \cdot x_0. \text{ Quand } t \rightarrow \infty :$$

- $\|x(t)\|$ reste borné si $p = 1$;
- $\|x(t)\| \rightarrow +\infty$ si $p > 1$

Dans les 2 cas, le système réduit à E_i est :

- **stable** (mais pas asymptotiquement stable) si $p = 1$;
- **instable** si $p > 1$.

• **Trajectoires dans $E_i \subset E_u$**

a) $\lambda > 0$ $\dim E_i = p$

$\forall x_0, x(t) = e^{\lambda t} \cdot P_{p-1}(Nt) \cdot x_0$: tend vers $\pm\infty$ en module quand $t \rightarrow \infty$

b) $\mu > 0$ $\dim E_i = 2p$

$\forall x_0, x(t) = e^{\mu t} \cdot \text{diag}[R(\omega t)] \cdot P_{p-1}(Nt) \cdot x_0$: $\|x(t)\| \rightarrow +\infty$ avec t

Dans les 2 cas, le système réduit à E_i est **instable**.

4.2.3 Théorème général de stabilité des systèmes linéaires

Les résultats précédemment établis s'expriment par le théorème général suivant :

Théorème général de stabilité des systèmes linéaires à temps continu

A étant un endomorphisme quelconque réel de $\mathbb{R}^n$, la restriction du système linéaire $\dot{x} = A \cdot x$ à son sous-espace :

- | | |
|----------------------|--|
| – stable E_s est | • asymptotiquement stable |
| – central E_c est | • simplement stable si elle est semi-simple |
| | • instable si elle n'est pas semi-simple |
| – instable E_u est | • instable |

Remarques

1. Pour un système linéaire, attractif implique stable donc aussi asymptotiquement stable, mais nous avons déjà signalé que cette implication **n'est pas valide** pour un système non-linéaire.
2. Le théorème précédent reste valable si on remplace E_s (resp. E_c, E_u) par un sous-espace vectoriel de E_s (resp. de E_c, E_u) invariant par A .
3. Dans E_s , la convergence de l'état vers 0 est exponentielle.
4. Dans E_c , deux cas génériques sont possibles. Dans tout sous-espace F de E_c de dimension p associé à une valeur propre réelle $\lambda = 0$ (ou de dimension $2p$ associé à des valeurs propres complexes $\pm i\omega$) stable par A :
 - (a) Si la restriction de A à F est semi-simple, c'est-à-dire si $p = 1$: l'état $x(t)$ est immobile ($\lambda = 0$) ou en rotation périodique ($\mu = 0$). Il y a **stabilité simple** de 0 ;
 - (b) Si en revanche $p > 1$, $\|x(t)\|$ croît comme $C \cdot t^{p-1}$ (voir l'exemple ci-après). L'équilibre 0 est **instable**.
5. Dans E_u , $\|x(t)\|$ diverge de façon exponentielle. L'équilibre 0 est **instable**.
6. Si E_u n'est pas vide, A est instable, mais la réciproque est fausse car l'instabilité peut provenir du sous-espace central E_c , dans le cas où la restriction de A à E_c n'est pas semi-simple.

Un exemple

Le système $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot x$ est déjà mis sous forme canonique.

A se compose d'un bloc de Jordan unique correspondant à $\lambda = 0$ et $p = 3$.

On a $E_s = E_u = \phi$; $E = E_c = \mathbb{R}^3$.

Le système s'écrit aussi :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= 0\end{aligned}$$

et s'intègre immédiatement en :

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \frac{1}{2}at^2 + bt + c \\ x_2(t) &= at + b \\ x_3(t) &= a\end{aligned}$$

Pour tout réel a , le plan $x_3 = a$ est invariant par le flot.

Dans tout plan $x_3 = a \neq 0$: $x_2 = at + b$ et $x_1 = \frac{x_2^2}{2a} + \left(c - \frac{b^2}{2a}\right)$. Les trajectoires sont des paraboles d'axe Ox_1 , parcourues avec l'accélération constante de mesure $1/a$ suivant Ox_1 ; il s'agit donc d'un mouvement uniformément accéléré.

Dans le plan $x_3 = 0$: $x_2 = b$ et $x_1 = bt + c = x_2 t + c$. Les trajectoires sont les droites parallèles à Ox_1 , parcourues à vitesse constante de mesure b suivant Ox_1 ; il s'agit donc d'un mouvement uniforme. Le champ $\dot{x} = f(x)$ a la même forme que le champ des vitesses d'un écoulement plan « cisaillé ». L'ensemble des équilibres est la droite Ox_1 . On vérifie sans peine que ces équilibres sont instables.

- Une notion importante est celle d'hyperbolicité :
A est dit **hyperbolique** si et seulement si $E_c = \phi$. En d'autres termes, A est hyperbolique si et seulement si les parties réelles de ses valeurs propres sont toutes différentes de zéro.
- Si de plus $E_u = \phi$, donc si E se réduit à E_s , le système est **hyperbolique stable**. Symétriquement, si E se réduit à E_u , le système est **hyperbolique instable**.

Définition

On appelle **indice** d'un endomorphisme A le triplet :

$$\text{indice}(A) = (\dim E_s, \dim E_c, \dim E_u), \text{ qu'on notera } (n^-, n^0, n^+)$$

On a naturellement $\dim E = \dim E_s + \dim E_c + \dim E_u$

4.3 STABILITÉ STRUCTURELLE ET CONJUGAISON

4.3.1 Stabilité structurelle d'un système hyperbolique

Nous allons dans ce paragraphe démontrer que si A est hyperbolique, toute matrice l'approchant assez près (voir la remarque 1 en fin de paragraphe) est aussi hyperbolique, et **de même indice**.

Soit A_0 un endomorphisme hyperbolique de $\mathbb{R}^n$, d'indice $(n^-, 0, n^+)$. Son polynôme caractéristique $P_0(z)$ admet donc :

- n^- racines à partie réelle négative ;
- n^+ racines à partie réelle positive, avec $n^- + n^+ = n$

(n^- et n^+ tiennent compte des ordres de multiplicité)

Soit Γ^- un contour simple de longueur finie inclus dans le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Re}(z) < 0\}$, délimitant un domaine Δ^- contenant les valeurs propres de A_0 à partie réelle négative. Ce peut être, comme dans la figure 4.5, un rectangle parcouru dans le sens positif et de côtés parallèles aux axes.

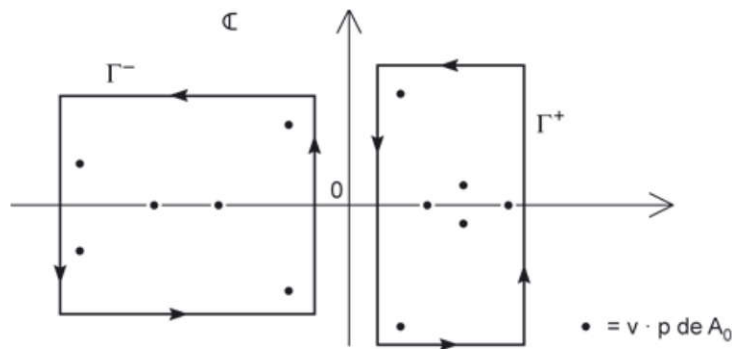


Figure 4.5 - Valeurs propres de A_0 .

Pour un endomorphisme A quelconque, on notera $[p_A] = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ le vecteur des coefficients du polynôme P caractéristique de A ; $a_n = 1$ est fixé.

Soit une boule ouverte $B_0 = B([p_{A_0}], r > 0)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $\forall [p_A] \in \overline{B_0}, \forall z \in \Gamma^-, a_0 + a_1 z + \dots + z^n \neq 0$.

L'application $([p_A], z) \mapsto \frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{a_1 + 2a_2 z + \dots + n z^{n-1}}{a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n}$ est continue sur le compact $\overline{B_0} \times \Gamma^-$ car le dénominateur, continu, ne s'y annule pas.

Or, l'application $A \mapsto f(A) = [p_A]$ de $\mathbb{R}^{n^2}$ dans $\mathbb{R}^n$ est continue car les composantes de $[p_A]$ sont des fonctions polynomiales de degré n des coefficients de A . Donc, $f^{-1}(B_0)$ est un voisinage de A_0 : il contient une boule ouverte de $\mathbb{R}^{n^2}$ centrée en A_0 , qui est un voisinage connexe V^- de A_0 .

Donc, l'application $A \mapsto \int_{\Gamma^-} \frac{P'(z)}{P(z)} dz$ est continue dans V^-

$$\bullet A \mapsto g^-(A) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma^-} \frac{P'(z)}{P(z)} dz \begin{cases} \text{est continue sur } V^- \text{ connexe} \\ \text{est à valeurs dans } \mathbb{N} \\ \text{vaut } n^- \text{ pour } A = A_0 \text{ (voir annexe 5)} \end{cases}$$

donc est égal sur V^- à la constante n^- .

En considérant le demi-plan $\operatorname{Re}(z) > 0$, on définit de façon analogue $g^+(A)$, Γ^+ , Δ^+ et V^+ . Alors :

$$\bullet A \mapsto g^+(A) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma^+} \frac{P'(z)}{P(z)} dz \begin{cases} \text{est continue sur } V^+ \text{ connexe} \\ \text{est à valeurs dans } \mathbb{N} \\ \text{vaut } n^+ \text{ pour } A = A_0 \text{ (voir annexe 5)} \end{cases}$$

donc est égal sur V^+ à la constante n^+ .

Comme $n^- + n^+ = n$, on a « fait le plein » des valeurs propres dans $\Delta^- \cup \Delta^+$: en d'autres termes, en prenant A suffisamment proche de A_0 , on ne fait pas apparaître de racine de P en dehors de $\Delta^- \cup \Delta^+$. Donc, dans le voisinage $V(A_0) = V^- \cap V^+$, l'indice de A reste égal à $(n^-, 0, n^+)$. On retiendra qu'il y a **permanence de l'indice** dans le cas d'un endomorphisme hyperbolique. Autrement dit, le caractère hyperbolique **résiste à une petite perturbation**, et cette dernière n'affecte pas l'indice. Cette propriété s'énonce ainsi :

Persistence du caractère hyperbolique

Si A_0 est un endomorphisme hyperbolique de E , alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $\|A - A_0\| < \varepsilon$, alors A est hyperbolique **de même indice** que A_0 .

Remarques

1. Dans le raisonnement précédent, on n'a pas précisé la norme $\|\cdot\|$ choisie dans l'espace $\mathbb{R}^{n^2}$ des endomorphismes. Cela n'a pas d'importance car toutes les normes d'un espace de dimension finie sont équivalentes. Le nombre ε évoqué dans le résultat est le plus petit des rayons de V^- et V^+ .
2. Il résulte de la propriété établie qu'un endomorphisme hyperbolique stable (respectivement instable) reste stable (respectivement instable) après une petite perturbation.
3. Si en revanche on perturbe un système non-hyperbolique, son indice n'est pas nécessairement pérenne : une valeur propre située sur l'axe imaginaire (caractéristique de la non-hyperbolicité) peut en effet quitter ce dernier sous l'effet d'une perturbation d'ampleur arbitrairement faible.
4. Nous établirons au chapitre 9, à l'occasion de l'étude des bifurcations, un théorème de stabilité structurelle locale étendant le résultat au cas des systèmes non-linéaires.

4.3.2 Conjugaison de systèmes hyperboliques

Nous venons d'énoncer la propriété de persistance du caractère hyperbolique d'un système linéaire. Celle-ci peut s'exprimer de façon concise : ***l'indice d'un endomorphisme hyperbolique est robuste*** (sous-entendu par rapport à une variation des paramètres définissant A , par exemple les éléments de la matrice A).

Nous allons montrer ce résultat plus précis qui met en jeu la conjugaison des systèmes :

Un système dynamique linéaire semi-simple $\dot{x} = A \cdot x$ ($x \in \mathbb{R}^n$) asymptotiquement stable est topologiquement conjugué au système $\dot{x} = -x$.

Pour cela, plaçons-nous dans un premier temps dans l'un des sous-espaces $E_1, \dots, E_q$ invariants par A évoqués au § 4.2.1. Ces espaces sont de dimension 1 (correspondant à une valeur propre réelle λ) ou 2 (correspondant à deux racines complexes conjuguées).

- **Cas d'un système de dimension 1** : soit y l'état. Son équation d'évolution est $\dot{y} = \lambda y$, avec $\lambda < 0$. Ce système est conjugué au système d'équation $\dot{x} = -x$.

L'homéomorphisme de conjugaison est $y = \psi(x) = \begin{cases} x^{-\lambda} & \text{si } x \geq 0 \\ -|x|^{-\lambda} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

En effet, si $x \geq 0$, $\dot{y} = -\lambda x^{-\lambda-1} \dot{x} = -\lambda x^{-\lambda-1} (-x) = \lambda x^{-\lambda}$.

Si $x \leq 0$, $\dot{y} = -\lambda |x|^{-\lambda}$

On retrouve bien dans tous les cas $\dot{y} = \lambda y$, ce qui montre que ψ , bicontinu, réalise une conjugaison topologique.

- **Cas d'un système de dimension 2** : dans un repère convenable de $\mathbb{R}^2$, l'état $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ vérifie $\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & -\omega \\ \omega & \mu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, la stabilité asymptotique impliquant $\mu < 0$. Les orbites sont des spirales logarithmiques : les coordonnées polaires (ρ, θ) permettent d'exprimer plus simplement les flots ϕ_1 et ϕ_2 , respectivement du système $\dot{x} = -x$ ($x \in \mathbb{R}^2$) et du présent système. En effet, on a pour les deux systèmes une décroissance exponentielle du module. L'argument de x reste constant, celui de y est fonction affine du temps. Par conséquent :

$$\phi_1[t, (\rho, \theta)] = (\rho e^{-t}, \theta)$$

$$\phi_2[t, (\rho, \theta)] = (\rho e^{\mu t}, \theta + \omega t)$$

Nous allons conjuguer ces deux systèmes :

- en opérant sur le module comme nous avons fait pour x dans le cas d'un système de dimension 1 ;

4.3. Stabilité structurelle et conjugaison

- en prenant en compte la croissance affine de l'argument θ de y en fonction du temps.

Ces deux exigences se traduisent par l'homéomorphisme suivant de conjugaison :

$$\psi(\rho, \theta) = (\rho^{-\mu}, \theta - \omega \ln \rho)$$

Par définition, ψ est une conjugaison si et seulement si $\psi \circ \phi_1 = \phi_2 \circ \psi$:

$$\begin{aligned} (\psi \circ \phi_1)[t, (\rho, \theta)] &= \psi(\rho e^{-t}, \theta) \\ &= (\rho^{-\mu} e^{\mu t}, \theta - \omega \ln(\rho e^{-t})) \\ &= (\rho^{-\mu} e^{\mu t}, \theta - \omega \ln \rho + \omega t) \\ (\phi_2 \circ \psi)[t, (\rho, \theta)] &= \phi_2[t, \psi(\rho, \theta)] \\ &= \phi_2[t, (\rho^{-\mu}, \theta - \omega \ln \rho)] \\ &= (\rho^{-\mu} e^{\mu t}, \theta - \omega \ln \rho + \omega t) \end{aligned}$$

On a $\psi \circ \phi_1 = \phi_2 \circ \psi$, ce qui prouve que ψ est bien une conjugaison.

- **Cas général** : ce qui précède est valable dans chacun des sous-espaces associés aux valeurs propres de l'endomorphisme. Cela implique la proposition énoncée en début de paragraphe.

Remarques

1. À une conjugaison topologique près, il existe **un seul** système dynamique linéaire semi-simple asymptotiquement stable de dimension n . On peut donc choisir le plus simple d'entre eux, qui est le système $\dot{x} = -x$.
2. On a vu qu'un système de dimension 2 asymptotiquement stable offre une certaine variété de portraits de phases. Les trajectoires peuvent en effet, en dehors bien sûr de l'équilibre qui définit lui-même une trajectoire, être par exemple toutes des droites, ou toutes des demi-paraboles, ou toutes des spirales centripètes. Les systèmes correspondants sont néanmoins conjugués, ce qui traduit la grande souplesse de la conjugaison topologique, qui ne connaît ni longueurs ni angles, mais simplement la notion de voisinage.

Au prix d'une démonstration plus complexe pour laquelle nous renvoyons à des ouvrages spécialisés, le résultat ci-avant se généralise doublement :

- au cas de systèmes linéaires pour lesquels A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire qui ne sont pas semi-simples ;
- au cas où les système ne sont plus nécessairement stables, mais restent hyperboliques.

On obtient alors le résultat plus général :

Deux systèmes dynamiques linéaires associés à des endomorphismes hyperboliques de même indice sont topologiquement conjugués.

À titre d'illustration, on pourra se reporter aux tableaux I et II (§ 5.2) : les quatre cas 1, 6, 8 et 12 correspondent à des systèmes semi-simples asymptotiquement stables, de même indice (2, 0, 0). Il y a conjugaison, bien que les orbites de ces systèmes aient des propriétés métriques (et même affines) très différentes.

4.3.3 Cas des systèmes non-hyperboliques

Dans le cas de systèmes non-hyperboliques, même d'indices identiques, il n'y a plus nécessairement conjugaison. À titre d'exemple, reprenons le tableau II : les trois cas 10, 11 et 14 correspondent au même indice (0, 2, 0) :

- dans le cas 10, tout point est un équilibre simplement stable ;
- dans le cas 11, l'ensemble des équilibres (instables) est une droite ;
- dans le cas 14, 0 est le seul équilibre, qui est simplement stable.

Il n'y a donc pas conservation des équilibres, ce qui implique qu'aucun de ces trois systèmes n'est conjugué à aucun des deux autres. Notons qu'une conjugaison conserve non seulement les équilibres mais aussi leur nature, ce qu'a montré l'exercice 3.3.

4.4 TRAJECTOIRES GÉNÉRATRICES D'UN SYSTÈME LINÉAIRE

On remarque aisément, ce qu'illustrent déjà clairement les portraits de phases en dimension 2, que la transformée de toute orbite par homothétie de centre 0 et de rapport arbitraire $\lambda \in \mathbb{R}$ est aussi une orbite ; si $\lambda = 0$, on obtient l'équilibre 0 en tant qu'orbite.

Mais il y a plus : pour presque tout point $a \in \mathbb{R}^n$ (c'est-à-dire hors d'un ensemble de mesure nulle) et **tout** point b de $\mathbb{R}^n$, $Orb(b)$ est l'homologue de $Orb(a)$ dans une application linéaire transformant a en b . Il en résulte qu'au sein d'une même orbite deux points sont indiscernables également « à une application linéaire près » ; le sens précis de cette assertion est donné plus loin.

Plus intéressant encore : l'application linéaire ψ transformant $Orb(a)$ en $Orb(b)$ **respecte le flot**, au sens où nous l'avons défini à propos de la conjugaison :

$\forall t \in \mathbb{R}, (\psi \circ \phi)(t, a) = \phi[t, \psi(a)] = \phi(t, b)$, c'est-à-dire : le descendant du transformé

4.4. Trajectoires génératrices d'un système linéaire

est le transformé du descendant (même chose pour les ascendants). Dans le cas où ψ est bijective, c'est la restriction d'une **conjugaison** à une orbite.

Ce résultat concerne les trajectoires ; il est donc plus fort que le précédent, qui concernait les orbites. Nous allons le montrer après quelques rappels.

Soit $\dot{x} = Ax$ un système linéaire sur $E = \mathbb{R}^n$. Dans une base convenable, A est sous forme réduite de Jordan : elle est donc bloc-diagonale. Cette structure est liée à la décomposition de E comme somme directe de q sous-espaces : $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_q$. Chaque espace E_i est invariant par le flot et attaché à une valeur propre réelle ou à un couple de valeurs propres complexes conjuguées, comme le précise l'annexe 4. Compte tenu de l'invariance des E_i , l'étude du flot se ramène à l'étude du **flot sur chacun des E_i** .

4.4.1 Une trajectoire génératrice dans E_i associé à $\lambda \in \mathbb{R}$

Nous avons vu au § 4.2.2 (cas $\boxed{1}$) que l'équation du système réduit à E_i est : $\dot{x} = Jx$, J étant la matrice $p \times p$ suivante, avec $p \geq 1$:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}; \text{ on a donc le flot : } \forall b \in E_i, \phi(t, b) = e^{Jt}b, \text{ avec :}$$

$$e^{Jt} = e^{\lambda t} P_{p-1}(Nt) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & \dots & \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{p-2}}{(p-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & t \\ 0 & & \dots & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Considérons alors } a = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et un point quelconque } b \text{ de } \mathbb{R}^p, \text{ avec } b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix}.$$

$$\text{Alors, } \phi(t, b) = e^{Jt}.b = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 t^2/2! + \dots + \beta_p t^{p-1}/(p-1)! \\ \beta_2 + \beta_3 t + \dots + \beta_p t^{p-2}/(p-2)! \\ \vdots \\ \beta_p t \\ \beta_p \end{pmatrix}$$

$$\text{Comme } \phi(t, a) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} \\ \frac{t^{p-2}}{(p-2)!} \\ \vdots \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ on a } \phi(t, b) = \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_p & \beta_{p-1} & \beta_{p-2} & \dots & \beta_1 \\ & \beta_p & \beta_{p-1} & \dots & \beta_2 \\ & & \beta_p & \dots & \beta_3 \\ & & & \ddots & \beta_{p-1} \\ & & & & \beta_p \end{pmatrix}}_{\psi(b)} \phi(t, a)$$

c'est-à-dire : Dans tout E_i associé à $\lambda \in \mathbb{R}$:
pour tout $b \in E_i$, $\phi(t, b) = \psi(b) \cdot \phi(t, a)$

où $\psi(b)$ représente un endomorphisme de $\mathbb{R}^p$. Ceci autorise à appeler **point générateur** le point a et **trajectoire génératrice** la trajectoire $t \mapsto \phi(t, a)$.

Si $\dim E_i = 1$ ($p = 1$), J est semi-simple et $\psi(b)$ est l'homothétie de rapport b_1 .

4.4.2 Une trajectoire génératrice dans E_i associé à $\mu \pm i\omega \notin \mathbb{R}$

Dans le cas présent, nous avons vu au § 4.2.2 (cas [2]) que l'équation du système réduit à E_i est $\dot{x} = Kx$, K étant la matrice $2p \times 2p$ suivante, avec $p \geq 1$:

$$K = \begin{pmatrix} \mu & -\omega & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \omega & \mu & 0 & 1 & & & & 0 & 0 \\ \vdots & & \mu & -\omega & & & & \vdots \\ \vdots & & \omega & \mu & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \mu & -\omega & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \omega & \mu & 0 & 1 \\ 0 & 0 & & & & & \mu & -\omega \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \omega & \mu \end{pmatrix}$$

Le flot est, pour tout $b \in E_i$: $\phi(t, b) = e^{Kt}b$. Si l'on pose $\begin{cases} \cos \omega t = C \\ \sin \omega t = S \end{cases}$, on obtient la formule suivante, déjà établie dans un cas particulier en exercice 4.1 :

4.4. Trajectoires génératrices d'un système linéaire

$$e^{Kt} = e^{\mu t} \begin{pmatrix} C - S & C t & -S t & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & C \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} & -S \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} \\ S & C & S t & C t & \cdots & \cdots & \cdots & S \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} & C \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} \\ 0 & 0 & C & -S & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & S & C & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & C & -S & C t & -S t \\ \vdots & & & & \ddots & S & C & S t & C t \\ \vdots & & & & & 0 & 0 & C & -S \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & S & C \end{pmatrix}$$

Alors, pour $a = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, nous avons $\phi(t, a) = e^{Kt} a = e^{\mu t} \begin{pmatrix} C t^{p-1}/(p-1)! \\ S t^{p-1}/(p-1)! \\ C t^{p-2}/(p-2)! \\ S t^{p-2}/(p-2)! \\ \vdots \\ C t \\ S t \\ C \\ S \end{pmatrix}$

Soit $b = \begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \\ c_2 \\ d_2 \\ \vdots \\ c_p \\ d_p \end{pmatrix}$ un point quelconque de $E_i = \mathbb{R}^{2p}$; il vient l'égalité :

$$\phi(t, b) = e^{Kt} . b = e^{\mu t} \begin{pmatrix} c_1 C - d_1 S + c_2 C t - d_2 S t + \cdots + c_p C \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} & - d_p S \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} \\ c_1 S + d_1 C + c_2 S t + d_2 C t + \cdots + c_p S \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} & + d_p C \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} \\ c_2 C - d_2 S + \cdots + c_p C \frac{t^{p-2}}{(p-2)!} & - d_p S \frac{t^{p-2}}{(p-2)!} \\ c_2 S + d_2 C + \cdots + c_p S \frac{t^{p-2}}{(p-2)!} & + d_p C \frac{t^{p-2}}{(p-2)!} \\ \vdots & \vdots \\ c_{p-1} C - d_{p-1} S + c_p C t - d_p S t & \\ c_{p-1} S + d_{p-1} C + c_p S t + d_p C t & \\ c_p C - d_p S & \\ c_p S + d_p C & \end{pmatrix}$$

Compte tenu de l'expression de $\phi(t, a)$ on constate que :

$$\phi(t, b) = \underbrace{\begin{pmatrix} c_p & -d_p & c_{p-1} & -d_{p-1} & \cdots & \cdots & c_1 & -d_1 \\ d_p & c_p & d_{p-1} & c_{p-1} & \cdots & \cdots & d_1 & c_1 \\ 0 & 0 & c_p & -d_p & \cdots & \cdots & c_2 & -d_2 \\ 0 & 0 & d_p & c_p & \cdots & \cdots & d_2 & c_2 \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & & & c_p & -d_p \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & d_p & c_p \end{pmatrix}}_{\psi(b)} \phi(t, a)$$

c'est-à-dire : Dans tout E_i associé à $\mu \pm i\omega \notin \mathbb{R}$:
pour tout $b \in E_i$, $\phi(t, b) = \psi(b) \cdot \phi(t, a)$

où $\psi(b)$ représente un endomorphisme de $\mathbb{R}^{2p}$. Dans le cas présent aussi, nous identifions $t \mapsto \phi(t, a)$ comme trajectoire génératrice et a comme point générateur aux sens définis au § 4.4.1.

Si $\dim E_i = 2$ ($p = 1$), K est semi-simple et $\psi(b)$ est une similitude plane.

4.4.3 Une trajectoire génératrice dans $E = \mathbb{R}^n$

Nous venons d'établir $\phi(t, b) = \psi(b) \cdot \phi(t, a)$, valide au sein de tout sous-espace E_i invariant par le flot et associé à une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$ ou à un couple de valeurs propres $\mu \pm i\omega \in \mathbb{C}$. Dans l'expression du flot au sein de E_i , nous avons omis l'indice i pour alléger l'écriture. Réhabilitons cet indice en appelant :

- a_i le point de E_i antérieurement appelé a ;
- b_i le point arbitraire de E_i antérieurement appelé b ;
- ϕ_i le flot réduit au sous-espace invariant E_i ;
- $\psi_i(b_i)$ l'endomorphisme de E_i associé comme on l'a vu à b_i .

Alors, nous pouvons regrouper les résultats précédents dans l'énoncé :

$\forall i \in \{1, \dots, q\}, \forall b_i \in E_i, \phi_i(t, b_i) = \psi_i(b_i) \cdot \phi_i(t, a_i)$. Matriciellement :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \phi_1(t, b_1) \\ \phi_2(t, b_2) \\ \vdots \\ \phi_q(t, b_q) \end{pmatrix}}_{\phi(t, b)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \psi_1(b_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \psi_2(b_2) & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \psi_q(b_q) \end{pmatrix}}_{\psi(b)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \phi_1(t, a_1) \\ \phi_2(t, a_2) \\ \vdots \\ \phi_q(t, a_q) \end{pmatrix}}_{\phi(t, a)}$$

4.4. Trajectoires génératrices d'un système linéaire

Dans cette égalité :

- a_i est l'élément de E_i dont, dans notre base (base de Jordan), toutes les coordonnées sont nulles, sauf :
 - la dernière, égale à 1, dans le cas où E_i est associé à $\lambda_i \in \mathbb{R}$;
 - l'avant-dernière, égale à 1, dans le cas où E_i est associé à $\mu_i \pm i\omega_i \in \mathbb{C}$.
- Tout ϕ_i est un vecteur de dimension $\dim E_i$;
- Tout ψ_i est une matrice de dimension $\dim E_i \times \dim E_i$;
- $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, et $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ est un point quelconque de $\mathbb{R}^n$.

L'égalité formelle $\phi(t, b) = \psi(b) \cdot \phi(t, a)$ déjà rencontrée dans chaque E_i est donc aussi **valable pour tout point b de E** .

En résumé, on a le résultat suivant, a étant le point défini ci-avant :

Tout système linéaire possède une trajectoire génératrice

Soit $\dot{x} = Ax$ un système linéaire sur $E = \mathbb{R}^n$, de flot $\phi(t, x)$.

Alors, pour tout $b \in E$, il existe un endomorphisme $\psi(b)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \phi(t, b) = \psi(b) \cdot \phi(t, a)$$

Le système ne possède donc **qu'une trajectoire** à des endomorphismes près. La trajectoire $t \mapsto \phi(t, b)$ est en effet, au sens précis de l'égalité établie, image de la trajectoire $t \mapsto \phi(t, a)$ par l'endomorphisme $\psi(b)$. On reconnaît en a un point générateur et en $t \mapsto \phi(t, a)$ une trajectoire génératrice du système.

La même remarque vaut pour les orbites, et on pourra appeler **orbite génératrice** l'orbite $Orb(a)$. Donc, à des endomorphismes près, le système **ne possède qu'une orbite**. En particulier, si $b \in Orb(a)$, l'orbite $Orb(b) = Orb(a)$ est **autosimilaire** par un endomorphisme transformant a en b .

4.4.4 Presque toute trajectoire est génératrice

Pour tout point α de E_i , nous avons $\forall t, \phi(t, \alpha) = \psi(\alpha) \phi(t, a)$.

- Si E_i est associé à une valeur propre réelle λ , nous avons :

$$\psi(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha_p & \alpha_{p-1} & \dots & \alpha_1 \\ & \alpha_p & \dots & \alpha_2 \\ & & \ddots & \alpha_{p-1} \\ & & & \alpha_p \end{pmatrix}, \text{ les } \alpha_i \text{ étant les composantes de } \alpha.$$

Comme $\det \psi(\alpha) = (\alpha_p)^p$, la matrice $\psi(\alpha)$ est inversible hors de l'hyperplan $\alpha_p = 0$. Alors, pour tout t , $\phi(t, a) = \psi(\alpha)^{-1} \phi(t, \alpha)$, d'où $\phi(t, b) = \psi(b) \psi(\alpha)^{-1} \phi(t, \alpha)$, ce qui montre que α est générateur. Retenons que presque tout point de E_i est générateur pour le système réduit à E_i , et que **presque toute** trajectoire dans E_i est génératrice ; « presque toute trajectoire » signifie « pour presque toute condition initiale $x(0)$ de la trajectoire ».

- Si E_i est associé à deux valeurs propres complexes $\mu \pm i\omega$, nous avons :

$$\psi(\alpha) = \begin{pmatrix} \gamma_p & -\delta_p & \gamma_{p-1} & -\delta_{p-1} & \cdots & \cdots & \gamma_1 & -\delta_1 \\ \delta_p & \gamma_p & \delta_{p-1} & \gamma_{p-1} & \cdots & \cdots & \delta_1 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & \gamma_p & -\delta_p & \cdots & \cdots & \gamma_2 & -\delta_2 \\ 0 & 0 & \delta_p & \gamma_p & \cdots & \cdots & \delta_2 & \gamma_2 \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & & & \gamma_p & -\delta_p \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \delta_p & \gamma_p \end{pmatrix}$$

où $(\gamma_1, \delta_1, \gamma_2, \delta_2, \dots, \gamma_p, \delta_p)$ sont les composantes de α .

Comme $\det \psi(\alpha) = [(\gamma_p)^2 + (\delta_p)^2]^p$, la matrice $\psi(\alpha)$ est inversible hors du sous-espace $\gamma_p = \delta_p = 0$ de dimension $p - 2$. Alors, pour tout t , on a par le même calcul formel que précédemment $\phi(t, b) = \psi(b) \psi(\alpha)^{-1} \phi(t, \alpha)$, ce qui montre que α est générateur dans E_i . L'endomorphisme en jeu est $\psi(b) \psi(\alpha)^{-1}$ et peut être noté $\psi(\alpha, b)$. Retenons que presque tout point de E_i est générateur, donc que presque toute trajectoire dans E_i est génératrice, toujours pour le système réduit à E_i .

La généralisation de ce qui précède à E entier se fait sans difficulté comme s'est faite au § 4.4.3 l'identification de $\phi(t, a)$ comme trajectoire génératrice. Le point a était alors un point particulier de E , mais nous savons désormais que presque tout point a de E (c'est-à-dire pour a appartenant à E privé d'un ensemble de mesure nulle) peut jouer le même rôle. Nous pouvons donc énoncer :

Dans tout système linéaire, presque toute trajectoire est génératrice

Pour **presque tout** a de E et pour **tout** point b de E , il existe un endomorphisme $\psi(a, b)$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, \phi(t, b) = \psi(a, b) \cdot \phi(t, a)$.

$\psi(a)$ et $\psi(b)$ étant les matrices explicitées ci-avant pour un point α quelconque, on a $\psi(a, b) = \psi(b) \psi(a)^{-1}$.

4.4. Trajectoires génératrices d'un système linéaire

Remarques

1. Il existe naturellement des trajectoires non-génératrices, ne serait-ce que la trajectoire nulle $t \mapsto \phi(0, t) = 0$.
2. Dans le résultat établi, il n'y a aucune restriction sur b , qui peut être un point non-générateur comme le sont c_2 et c_3 dans l'illustration ci-après ; b peut aussi être un équilibre.
3. Deux orbites quelconques peuvent ne pas être transformées l'une de l'autre par un endomorphisme. Par exemple, dans l'illustration qui suit, il y a des orbites circulaires et des orbites rectilignes, mutuellement inaccessibles par application linéaire. Ces orbites ne sont pas génératrices.
4. Il n'y a pas symétrie : la trajectoire T_1 peut générer T_2 sans que T_2 puisse générer T_1 (considérer la trajectoire nulle). Ceci vaut aussi pour les orbites.
5. Pour $t = 0$, $\phi(t, b) = \psi(a, b) \cdot \phi(t, a)$ entraîne $b = \psi(a, b) \cdot a$. On a donc $\phi(t, \psi(a, b) \cdot a) = \psi(a, b) \cdot \phi(t, a)$. En écriture abrégée : $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi$; on reconnaît formellement une **conjugaison**, mais celle-ci se limite aux deux trajectoires concernées, c'est-à-dire à deux systèmes monodimensionnels.
6. Naturellement, l'existence des trajectoires génératrices au sens où nous les avons définies ne se généralise pas aux systèmes non-linéaires.

Illustration : soit sur $E = \mathbb{R}^3$ le système $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1 \end{pmatrix} x$

La figure 4.6 (sur laquelle les coordonnées sont désignées par x, y et z) en montre trois orbites :

- une hélice tracée à partir de $c_1 = (1, 0, 1)$;
- un cercle tracé à partir de $c_2 = (1, 0, 0)$;
- un segment rectiligne tracé à partir de $c_3 = (0, 0, 1)$.

Il apparaît que la première génère la seconde par projection verticale (qui est l'endomorphisme $\psi(c_1, c_2)$), et la troisième par projection horizontale sur l'axe vertical (qui est l'endomorphisme $\psi(c_1, c_3)$). Une validation analytique est proposée en exercice 4.2.

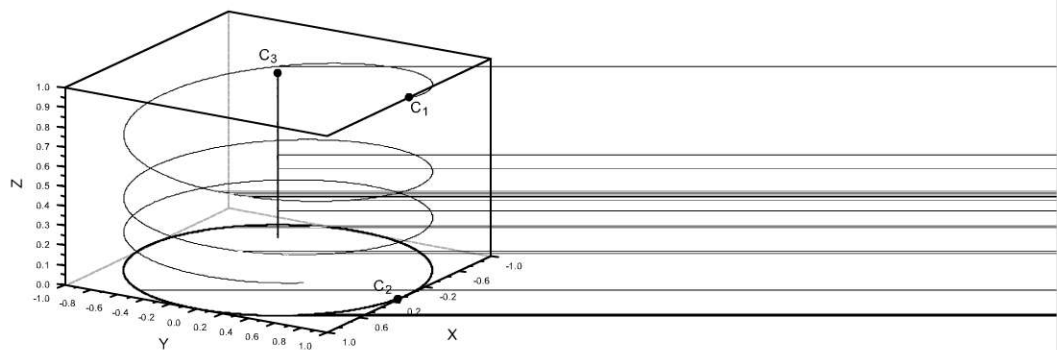


Figure 4.6 - Trois orbites dont une génératrice.

Exercice 4.2 Deux exemples d'endomorphismes $\psi(a, b)$

On considère le système $\dot{x} = A x$ avec $x \in E = \mathbb{R}^3$ correspondant à l'illustration précédente (figure 4.6).

1. Préciser la décomposition $E = E_1 \oplus E_2$; donner les valeurs propres complexes associées à E_1 et la valeur propre réelle associée à E_2 .
2. Expliciter le flot $x(t) = \phi(t, x_0)$. L'appliquer à $x_0 = c_1, c_2$ et c_3 .
3. Expliciter les endomorphismes $\psi(c_1, c_2)$ et $\psi(c_1, c_3)$.

PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES EN DIMENSIONS 1 ET 2

5

5.1 PROPRIÉTÉS DE BASE DES SYSTÈMES DE DIMENSION 1

Les systèmes de dimension 1 sont naturellement les plus simples, ce qui explique la brièveté de ce paragraphe. Nous avons déjà montré en exercice 1.4 qu'un système monodimensionnel :

- ne peut pas avoir d'orbite périodique si Ω est un intervalle réel ;
- peut en revanche en posséder si Ω est un cercle, encore nommé tore T^1 de dimension 1 ou sphère S^1 de dimension 1.

L'exercice suivant revient sur le cas d'un système défini sur $\mathbb{R}$, et en établit quelques autres propriétés de base.

Exercice 5.1 Trajectoires, orbites et plages temporelles d'un flot sur $\mathbb{R}$

Soit $\dot{x} = f(x)$ un système défini sur $\Omega = \mathbb{R}$, avec f localement lipschitzienne.

1. Montrer que l'orbite de tout x régulier est le plus grand intervalle contenant x et constitué de points réguliers.
2. x étant un point régulier de plage temporelle $J(x)$, montrer que la trajectoire $t \in J(x) \mapsto \phi(t, x)$ est strictement monotone.
3. (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, si $Orb(x)$ est bornée, alors $J(x) = \mathbb{R}$.
(b) Que devient ce résultat si $Orb(x)$ n'est pas bornée ?

5.2 PORTRAITS DE PHASES D'UN SYSTÈME LINÉAIRE DE DIMENSION 2

Les systèmes dynamiques offrent une variété infinie de comportements. Mais il est remarquable que l'examen du cas *a priori* élémentaire des systèmes linéaires d'ordre 2 fournisse déjà une large variété de trajectoires. Cet examen, déjà intéressant en soi, est aussi un préliminaire pour l'étude de systèmes non-linéaires plus sophistiqués.

Les tableaux suivants présentent les portraits de phases du système linéaire $\dot{z} = A \cdot z$ où $z \in \mathbb{R}^2$, A étant une matrice réelle de dimension 2×2 de valeurs propres λ (dans $\mathbb{R}$) ou $\mu \pm i\omega$ (dans $\mathbb{C}$), avec $\omega > 0$. On appellera x et y les composantes du vecteur z .

On obtient **14 cas** correspondant à des valeurs propres réelles dans les cas 1 à 11, complexes dans les cas 12 à 14 :

1. $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	nœud attractif ou puits
2. $0 < \lambda_1 < \lambda_2$	nœud répulsif ou source
3. $\lambda_1 < \lambda_2 = 0$	
4. $0 = \lambda_1 < \lambda_2$	
5. $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	col ou point-selle
6. $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ avec A semi-simple	nœud attractif
7. $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ avec A semi-simple	nœud répulsif
8. $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ avec A non semi-simple	nœud attractif impropre
9. $0 < \lambda_1 = \lambda_2$ avec A non semi-simple	nœud répulsif impropre
10. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ avec A semi-simple	
11. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ avec A non semi-simple	
12. $\mu < 0$	foyer attractif
13. $\mu > 0$	foyer répulsif
14. $\mu = 0$	centre ou point elliptique

5.2. Portraits de phases d'un système linéaire de dimension 2

Exemples de portraits de phases en dimension 2 – cas 1 à 6

Ces exemples font l'objet des deux tableaux I (présent tableau) et II (tableau de la page suivante).

LÉGENDE A : exemple de matrice correspondant au cas
 (a, b, c) : indice de l'endomorphisme A
 ST : stable
 AST : asymptotiquement stable
 INST : instable

La matrice A est semi-simple dans tous les cas sauf dans les cas 8, 9 et 11.

Ces trois cas figurent dans le tableau II (page suivante).

1 $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (2, 0, 0) nœud AST	2 $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ (0, 0, 2) nœud INST	3 $\lambda_1 < \lambda_2 = 0$ $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (1, 1, 0) tout (0, y) ST
4 $0 = \lambda_1 < \lambda_2$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (0, 1, 1) tout (x, 0) INST	5 $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (1, 0, 1) col INST	6 $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (2, 0, 0) nœud AST

Tableau I

Exemples de portraits de phases en dimension 2 : cas 7 à 14

La légende figure en tableau I, page précédente.

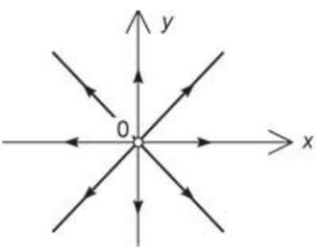
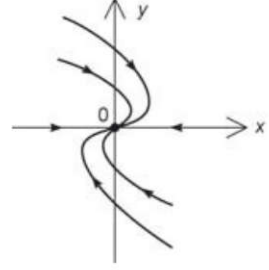
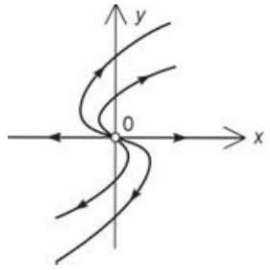
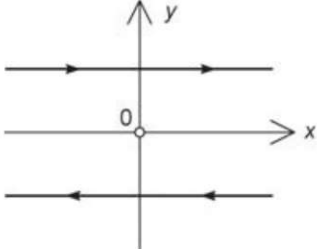
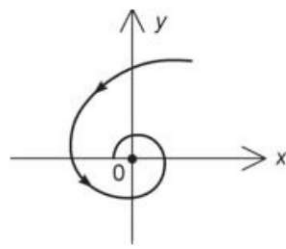
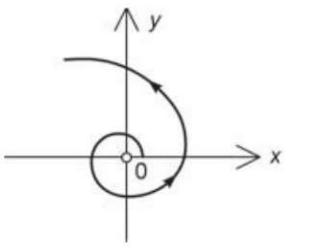
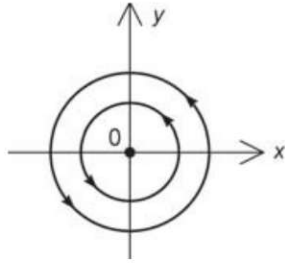
7 $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  (0, 0, 2) nœud INST	8 $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  (2, 0, 0) nœud AST	9 $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  (0, 0, 2) nœud INST
10 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ immobilité de tout point  (0, 2, 0) tout (x, y) ST	11 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  (0, 2, 0) tout (x, 0) INST	12 $\mu < 0$ $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  (2, 0, 0) foyer AST
13 $\mu > 0$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  (0, 0, 2) foyer INST	14 $\mu = 0$ $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  (0, 2, 0) centre ST	Complément au cas 8 Equation des trajectoires avec $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$: $x = \left(\frac{x_0}{y_0} + \ln y_0 \right) y - y \ln y $ (voir aussi exercice 5.3)

Tableau II

5.3 COURBURE D'UNE TRAJECTOIRE PLANE

Lorsqu'on progresse avec t le long d'une trajectoire, celle-ci s'incurve vers la gauche ou vers la droite : on parlera, dans le plan euclidien orienté, d'une courbure respectivement positive ou négative. Cette notion de signe d'une courbure n'a plus de sens – tout comme celle d'angle orienté – en dimension supérieure à deux.

Supposons le système S de classe C^2 . Prenant le temps t comme paramètre de la trajectoire considérée comme courbe orientée, rappelons ce résultat de géométrie euclidienne : la courbure au **point régulier** $z = (x, y) \in \Omega$ est : $\gamma(z) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$. Notons que la formule est valable pour tout paramétrage, temporel ou autre.

Cette formule a une expression plus synthétique : $\gamma(z) = \frac{\dot{z} \wedge \ddot{z}}{\|\dot{z}\|^3}$. Comme $\ddot{z}$ est la dérivée particulière de $\dot{z}$, on a $\ddot{z} = \nabla \dot{z}.f$: cette formule est de forme analogue à $\dot{F} = \nabla F.f$ pour une fonction scalaire F (voir § 6.3.1) et s'établit de la même façon.

Aussi peut-on écrire, avec des notations différentes : $\gamma(z) = \frac{f \wedge (\nabla f.f)}{\|f\|^3}$.

Il est entendu que les valeurs du champ f et de l'endomorphisme ∇f sont celles au point z , et que $\nabla f.f$ représente l'action de l'opérateur ∇f sur le vecteur f .

Remarques

1. Dans la formule encadrée précédente, en tout point régulier, le dénominateur est non-nul et le numérateur a une valeur finie. Ceci signifie que le rayon de courbure, inverse de la courbure, **ne peut pas être nul**. Il peut en revanche être infini.
2. Le long d'une trajectoire, le rayon de courbure peut toutefois tendre vers 0 quand $t \rightarrow \infty$, comme par exemple dans le cas 12 du § 5.2.

Cas d'un système linéaire

Dans le cas où S est linéaire, on a $\Omega = \mathbb{R}^2$ et $f(z) = Az$.

Alors, $\nabla f = A$ et $\nabla f.f(z) = A.Az = A^2z$.

On a donc l'expression du rayon de courbure : $\gamma(z) = \frac{(Az) \wedge (A^2z)}{\|Az\|^3}$

Avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un calcul sans difficulté nous fournit l'expression de la courbure

au point $z = (x, y)$: $\gamma(z) = \frac{(ad - bc)[cx^2 + (d - a)xy - by^2]}{[(ax + by)^2 + (cx + dy)^2]^{3/2}}$

Points de courbure nulle

Par raccourci de langage, appelons « points de courbure nulle » les points en lesquels la trajectoire concernée est de courbure nulle. Ces points sont en général les points d'inflexion, en lesquels l'orbite traverse sa tangente, et plus exceptionnellement les « méplats » (exemple : le point $(0, 0)$ de la courbe d'équation $y = x^4$) au voisinage desquels l'orbite reste du même côté de la tangente. Identifier les points de courbure nulle revient simplement à annuler $f \wedge (\nabla f \cdot f)$.

Cas des systèmes linéaires

Pour un système linéaire, on a l'équivalence :

$$\gamma(z) = 0 \iff [f \wedge (\nabla f \cdot f)]_{\text{en } z} = 0 \iff (Az) \wedge (A^2 z) = 0$$

Ceci signifie que $A^2 z$ et Az sont colinéaires, donc que Az est vecteur propre de A ; n'oublions pas que, z étant régulier, on a $Az \neq 0$.

Soit z_0 un point régulier de courbure nulle. Posons $u = Az_0$. Comme z_0 est régulier, on a $u \neq 0$. De plus, $Au \wedge u = 0 \implies \exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Au = \lambda u$. Si $z(0) = z_0$, l'état à l'instant $t \in \mathbb{R}$ est donné par l'expression du flot :

$$\begin{aligned} \phi(t, z_0) &= e^{At} z_0 \\ &= [I + tA + \frac{t^2}{2!} A^2 + \frac{t^3}{3!} A^3 + \dots] z_0 \text{ (la convergence de la série est toujours assurée)} \\ &= z_0 + tu + \frac{t^2}{2!} Au + \frac{t^3}{3!} A^2 u + \dots = z_0 + tu + \frac{t^2}{2!} \lambda u + \frac{t^3}{3!} \lambda^2 u + \dots \end{aligned}$$

Si $\lambda = 0$, $Au = 0$ et $\phi(t, z_0) = z_0 + tu$: le flot représente un mouvement rectiligne uniforme. On est dans le cas 11 du paragraphe 5.2. L'orbite est rectiligne.

Si $\lambda \neq 0$, alors $\phi(t, z_0) = z_0 + \frac{u}{\lambda} \left[\lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \frac{(\lambda t)^3}{3!} + \dots \right]$, c'est-à-dire :

$\phi(t, z_0) = z_0 + \frac{u}{\lambda} (e^{\lambda t} - 1)$. Ce sont par exemple les cas 6 ou 7 du paragraphe 5.2 si $Az_0 // z_0$, 3 ou 4 dans le cas contraire. L'orbite est encore rectiligne, mais parcourue à vitesse exponentielle.

Nous venons de montrer que :

Pour tout système linéaire de dimension 2, seules les orbites rectilignes possèdent des points de courbure nulle, ce qui est alors le cas de tous leurs points. Elles sont décrites à vitesse constante ou exponentielle.

Remarques

1. Comme tout point d'inflexion est de courbure nulle, on peut dans l'énoncé précédent remplacer « points de courbure nulle » par « points d'inflexion ». L'énoncé est alors moins général.
2. Certains auteurs définissent un point d'inflexion comme un point de courbure nulle ; la courbe peut alors ne pas traverser sa tangente, comme la courbe d'équation $y = x^4$ évoquée plus haut à son point $(0, 0)$.
3. En dehors des cas génériques $y = x^3$ (point d'inflexion classique) et $y = x^4$ (méplat d'une fonction convexe), on peut imaginer d'autres physionomies géométriques : par exemple, la courbe $y = x^4 \sin \frac{1}{x}$ avec $y(0) = 0$ traverse une infinité de fois sa tangente en 0.

Problème 5.1 Points d'inflexion des orbites

On considère le système non-linéaire : $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = (x^2 + y^2 - \mu) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$, où μ est un paramètre réel. On notera $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ l'état du système, $f(z)$ la fonction $z \mapsto \dot{z}$.

1. En considérant la composante radiale (colinéaire à $\dot{z}$) de $\dot{z}$, montrer qu'il y a un cercle invariant par le flot si $\mu > 0$, et que $(0, 0)$ est le seul équilibre pour tout μ .
2. En prenant en compte le caractère centripète ou centrifuge du flot, toujours à partir de sa composante radiale, esquisser l'allure des orbites pour $\mu = -1$ puis pour $\mu = 1$.
3. Déterminer l'ensemble des points d'inflexion des orbites.

5.4 CRITÈRE DE BENDIXSON

On rappelle qu'un ensemble *simplement connexe* est un ensemble connexe sur lequel toute courbe fermée peut être réduite à un point par déformation continue. Par exemple, $\mathbb{R}^2$ ainsi que tous ses pavés sont simplement connexes, alors que $\mathbb{R}^{2*} = \mathbb{R}^2 - (0, 0)$ ne l'est pas. En effet, le cercle $x_1^2 + x_2^2 = 1$ ne peut être réduit à un point, car $(0, 0)$ fait obstacle à cette opération.

Soit le système $S : \dot{x} = f(x)$, où $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et soit f de classe C^1 dans un domaine simplement connexe Ω de $\mathbb{R}^2$. Si Γ est un circuit (chemin fermé) de Ω sans point double et Δ son intérieur, le **théorème de Green** exprime l'égalité entre l'intégrale sur Δ de la divergence de f et le flux de f à travers Γ , c'est-à-dire :

$$\iint_{\Delta} \text{Div } f \, dx_1 \, dx_2 = \oint_{\Gamma} f \wedge dx$$

Si maintenant Γ est un cycle du système, comme f lui est en tout point tangent, le flux (terme de droite) est nul. Or, si $\text{Div } f$ est strictement de même signe presque partout dans Ω , il en est de même du terme de gauche. Comme ces deux constatations sont contradictoires, on peut énoncer le résultat suivant :

Critère de Bendixson

Si f est de classe C^1 dans le domaine plan simplement connexe Ω et si $\text{Div } f$ y est presque partout strictement de même signe, alors le système $\dot{x} = f(x)$ n'admet aucun cycle dans Ω .

Remarques

1. Ce résultat est invalide dès la dimension 3. Par exemple, pour le système linéaire $\dot{z} = f(z) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} z$ dans $\Omega = \mathbb{R}^3$, on a en tout point $\text{Div } f = 1$. Cependant, il y a une infinité de cycles qui sont les cercles de centre 0 dans le plan de cote nulle.
2. Le résultat est invalide aussi si le domaine plan est connexe sans être simplement connexe. L'exemple du système $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} + (x^2 + y^2 - 1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ montre que dans une couronne (qui est un ouvert connexe, donc un domaine) convenable la divergence est en tout point positive et il y a néanmoins un cycle dans la couronne. Le développement de cet exemple fait l'objet de l'exercice suivant.

Exercice 5.2 Bendixson : nécessité de la simple connexité

L'exercice montre la nécessité de l'hypothèse « simplement connexe » pour l'application du critère de Bendixson.

On considère le système $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = f(x, y)$ avec :

$$f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \text{ défini sur } \mathbb{R}^{2*}.$$

1. Calculer $\text{Div } f$. Vérifier que $\text{Div } f > 0$ dans l'anti-disque $x^2 + y^2 > 1/2$.
2. Soit D la couronne ouverte limitée par les cercles de centre 0 et de rayons respectifs $3/4$ et 2 . Montrer qu'en tout point de D on a $\text{Div } f > 1/4$, et que D contient un cycle (orbite périodique).

Nota : ce cycle a déjà été déterminé au problème 5.1.

5.5 ÉVOLUTION D'UN PORTRAIT DE PHASES

Lorsqu'un système dynamique dépend d'un paramètre, il est intéressant d'observer comment son portrait de phases évolue en fonction du paramètre. L'exemple qui suit est simple, car il s'agit d'un système linéaire de dimension 2. Il est toutefois instructif car il montre comment un portrait de phases peut évoluer qualitativement au franchissement d'une certaine valeur du paramètre : on parle alors de **bifurcation**, notion qui fera l'objet du chapitre 9. Nous constaterons naturellement que certaines propriétés géométriques peuvent évoluer hors de toute bifurcation.

Soit S le système dynamique d'équation d'évolution : $\dot{z} = A \cdot z$, avec $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

On prend $A = \begin{pmatrix} -1 & \mu \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, où μ est un paramètre réel.

Notons que si l'on considère le système (noté λS) d'équation $\dot{z} = (\lambda A) \cdot z$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$, les trajectoires (en tant que solutions de l'équation d'évolution) sont modifiées, mais pas les orbites (en tant que sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$) : la « vitesse » de passage $\dot{z}$ en un point donné est multipliée par λ . Pour $\lambda < 0$, les systèmes S et λS peuvent ne pas être conjugués. Néanmoins, ils possèdent les mêmes portraits orbitaux (ensembles des orbites) et sont dits pour cela **orbitalement équivalents**.

Nous allons observer l'évolution du portrait de phases lorsque μ parcourt $\mathbb{R}$.

Pour $\mu \leq 0$, c'est-à-dire pour les six premiers des sept cas évoqués ci-après, nous posons $\mu = -\nu^2$, avec $\nu \geq 0$. Dans ce cas, $A = \begin{pmatrix} -1 & -\nu^2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Les deux valeurs propres sont :

- $\lambda_1 = -1 - \nu$, toujours négative.
La droite propre D_1 correspondante est $x = \nu y$;
- $\lambda_2 = -1 + \nu$, dont le signe dépend de ν .
La droite propre D_2 correspondante est $x = -\nu y$.

1^{er} cas : $\mu < -1$: dans ce cas, $\nu > 1$. Alors, les deux valeurs propres sont de signes opposés. Le système est hyperbolique et on se trouve dans le cas n° 5 du § 5.2. L'indice du système est (1, 0, 1).

En dehors des droites D_1 et D_2 , les orbites sont d'allure hyperbolique et admettent D_1 et D_2 comme asymptotes. Néanmoins, ce ne sont pas des arcs d'hyperboles car les deux valeurs propres sont différentes. Comme $|-1-\nu| > |-1+\nu|$, toute trajectoire (hors asymptotes) se rapproche de D_2 plus vite qu'elle ne s'éloigne de D_1 . Ce phénomène est d'autant plus marqué que le rapport $\left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right|$ est grand. Ainsi, dans une représentation graphique, la distance entre deux orbites de même asymptote portée par D_2 peut-elle couramment devenir inférieure à l'épaisseur du tracé : les orbites semblent alors

se confondre entre elles et avec D_2 pour $|x|$ suffisamment grand. Ce phénomène de **confusion d'orbites** est courant dans les portraits de phases et mérite d'être signalé car il est porteur de sens. Dans le cas présent, il signifie que la valeur propre négative a une valeur absolue plus grande que la valeur propre positive.

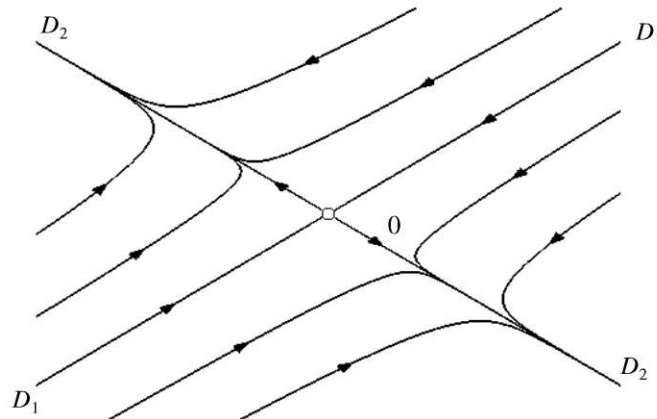


Figure 5.1 - Portrait de phases pour $\mu = -1,44$.

La figure est tracée pour $\mu = -1,44$, soit pour $\nu = 1,2$, ce qui conduit à un rapport $|\lambda_1/\lambda_2| = 11$: cette valeur importante explique le caractère net de la confusion d'orbites.

Remarques

1. En toute rigueur, le rapprochement d'orbites existe aussi, dans notre exemple, pour $|x|$ suffisamment grand, au voisinage de D_1 puisque toutes les orbites admettent cette droite comme asymptote : mais les dimensions de la figure 5.1 ne sont pas assez importantes pour le mettre en évidence.
2. Pour le système $\dot{z} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \cdot z$, les orbites sont des hyperboles équilatères ; le rapprochement d'orbites est équivalent sur les quatre demi-droites concernées, mais généralement pas suffisant pour aboutir à une confusion d'orbites vraiment observable.

2^e cas : $\mu = -1$: alors, $\nu = 1$, et $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres sont $\lambda_1 = -2$ et $\lambda_2 = 0$. Le système n'est plus hyperbolique. Son indice est $(1, 1, 0)$. L'ensemble $\mathcal{E}$ des équilibres est la deuxième bissectrice $x + y = 0$. Tous les équilibres sont stables, mais ne sont pas attractifs. Hors équilibres, les orbites sont les demi-droites ouvertes de pente 1 limitées par $\mathcal{E}$.

Le système n'est plus conjugué au système obtenu pour $\mu < -1$. Il y a **bifurcation**. L'examen des figures 5.1 et 5.2 montre comment on passe du premier au deuxième cas. Lorsque μ croît vers -1 , les trajectoires se rapprochent de D_2 , pour venir s'y arrêter (en un point précis mais en un temps infini) lorsque $\mu = -1$, valeur pour laquelle D_2 devient l'ensemble des équilibres $\mathcal{E}$.

5.5. Évolution d'un portrait de phases

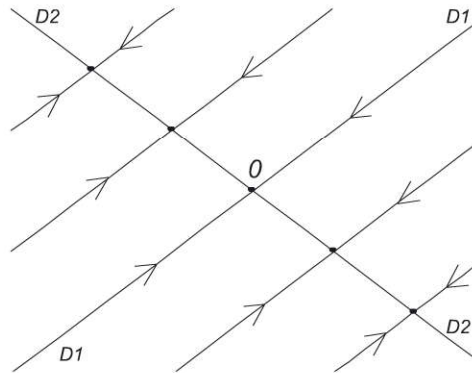


Figure 5.2 - Portrait de phases pour $\mu = -1$.

3^e cas : $-1 < \mu < -1/9$: alors, les valeurs propres $-1 \pm \nu$ sont toutes deux négatives. Le système redevient hyperbolique, mais d'indice $(2, 0, 0)$. Il est donc asymptotiquement stable et n'est conjugué à aucun des systèmes correspondant aux cas 1 et 2. Les orbites sont portées par des courbes d'allure parabolique. On a $1/3 < \nu < 1$, et le rapport λ_1/λ_2 est strictement supérieur à 2. La courbure d'une orbite, quel que soit le point initial $z_0 \neq 0$, tend vers 0 lorsque $t \rightarrow \infty$. Il en résulte que les orbites s'« écrasent » sur la droite D_2 d'équation $x = -\nu y$, qui est le sous-espace propre associé à $\lambda_2 = -1 + \nu$. Il y a à nouveau phénomène de *confusion d'orbites*.

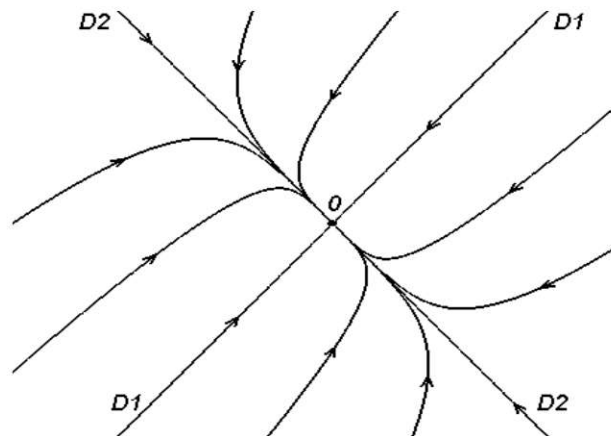


Figure 5.3 - Portrait de phases pour $\mu = -4/9$.

La figure est tracée pour $\mu = -4/9$, soit pour $\nu = 2/3$, ce qui conduit à un rapport $|\lambda_1/\lambda_2| = 5$, valeur importante qui explique la netteté du phénomène de confusion d'orbites ; ce phénomène est moins radical toutefois que celui de la figure 5.1.

Contrairement au premier cas, la confusion d'orbites ne se fait pas au voisinage d'une asymptote, mais au voisinage d'une tangente commune à l'équilibre : il s'agit de D_2 dans les deux cas. A la traversée de la valeur $\mu = -1$, il y a *bifurcation* : initialement col, l'équilibre devient un nœud.

4^e cas : $\mu = -1/9$: alors, $\nu = \frac{1}{3}$, et $A = \begin{pmatrix} -1 & -1/9 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres sont $\lambda_1 = -4/3$ et $\lambda_2 = -2/3$. Les sous-espaces propres de dimension 1 sont les droites D_1 et D_2 . Comme $\lambda_1/\lambda_2 = 2$, la courbure d'une orbite (hors D_1 et D_2) tend vers une valeur finie non nulle. Dans le cône $|x| < \nu|y|$, la courbure des trajectoires (voir le § 5.3) est positive. Elle est négative dans le cône $|x| > \nu|y|$.

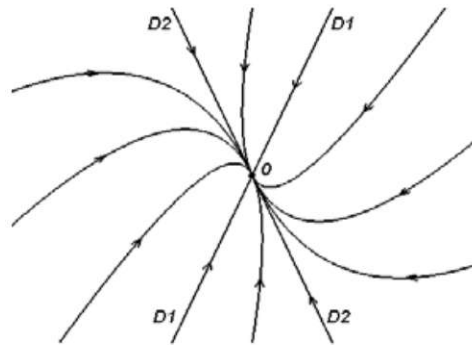


Figure 5.4 – Portrait de phases pour $\mu = -1/9$.

Ce cas est le seul pour lequel la courbure d'une orbite (hors D_1 et D_2) tend vers une valeur finie non-nulle quand l'état tend vers 0.

5^e cas : $-1/9 < \mu < 0$: alors, $0 < \nu < 1/3$. Quand la valeur de μ augmente, les droites D_1 et D_2 se resserrent sur l'axe des ordonnées, restreignant ainsi l'espace dévolu aux trajectoires à courbure positive. Le rapport λ_1/λ_2 appartient à $]1, 2[$: il en résulte que la courbure d'une trajectoire (hors D_1 et D_2) tend vers $\pm\infty$ quand $t \rightarrow \infty$.

Le portrait de phases présente de grandes similitudes avec celui du 4^e cas. Les deux trajectoires « presque verticales » sont en fait de courbure positive.

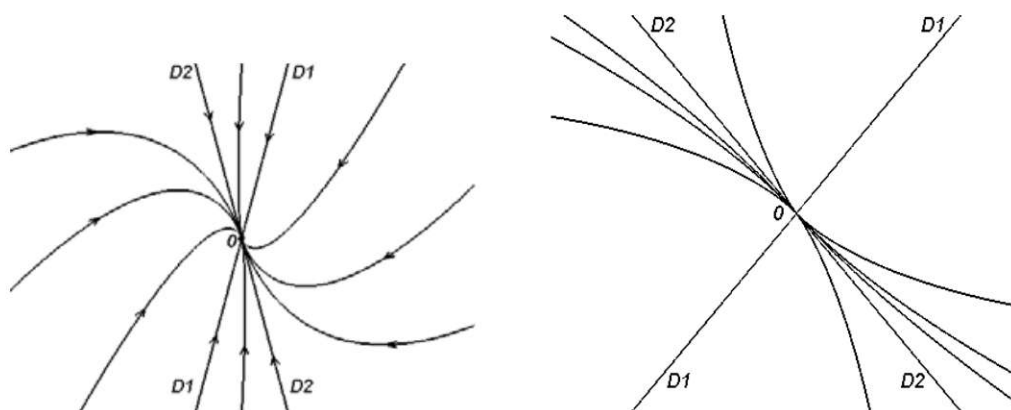


Figure 5.5 – Portrait de phases pour $-1/9 < \mu < 0$.

• Figure 5.5 de gauche : la tendance de la courbure des orbites vers l'infini à l'approche de 0 est une différence géométrique majeure... mais n'apparaît pas de façon frappante à l'échelle de la figure.

• Figure 5.5 de droite : le même portrait de phases est agrandi et légèrement dilaté en abscisse : la courbure infinie (rayon de courbure nul) se perçoit mieux, sachant que toutes les orbites hors D_1 sont tangentes à D_2 . Ce dernier fait est masqué par la nullité des rayons de courbure en 0. Le portrait peut ainsi évoquer à tort un faisceau de courbes dont les tangentes en 0 sont distinctes. Ce phénomène qu'on pourrait nommer **répulsion d'orbites** est l'opposé du phénomène de confusion d'orbites.

6^e cas : $\mu = 0$: alors, $\nu = 0$ et $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ possède la valeur propre double -1 et n'est plus semi-simple. Les droites D_1 et D_2 se sont refermées sur l'axe des ordonnées, avec lequel elles sont confondues. La zone à courbure positive a disparu.

Hors $D_1 = D_2$, la courbure d'une trajectoire tend vers $-\infty$ quand $t \rightarrow \infty$. Le système n'est *pas semi-simple*, comme le montre l'exercice 5.3.

Exercice 5.3 Équations d'orbites

1. Montrer que le système $\dot{z} = Az$ avec $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas semi-simple, et vérifier que $y = x \ln x$ ($x \in \mathbb{R}_+^*$) est l'équation d'une orbite.
2. En déduire que toute orbite non rectiligne est homothétique de l'orbite $y = x \ln x$ ($x \in \mathbb{R}_+^*$).

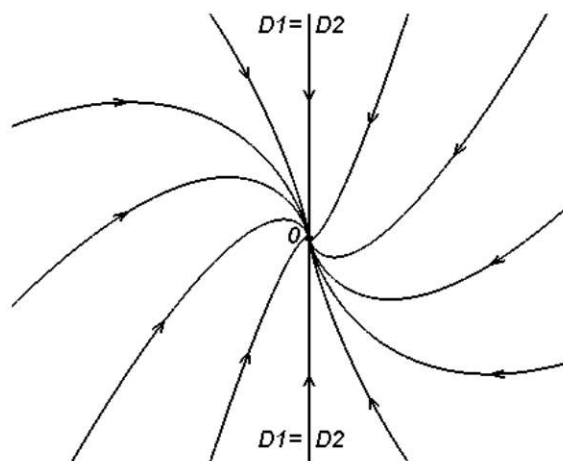


Figure 5.6 - Portrait de phases pour $\mu = 0$.

Les orbites non rectilignes sont homothétiques de l'orbite $y = x \ln x$ ($x > 0$). On peut d'ailleurs à partir des équations retrouver le comportement de la courbure, dont l'expression classique est $\frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}$.

7^e cas : $\mu > 0$: dans ce nouveau cas, nous posons $\mu = \nu^2$ avec $\nu > 0$.

Les valeurs propres de A sont désormais complexes : $\lambda = -1 \pm i\nu$. En repère orthonormé, les orbites sont des spirales logarithmiques.

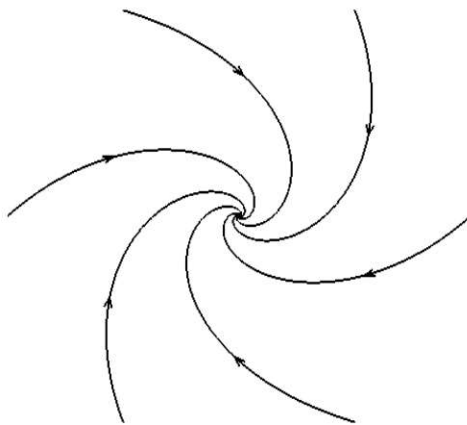


Figure 5.7 – Portrait de phases pour $\mu > 0$.

La figure est classique. Deux orbites autres que $\{0\}$ sont homologues par une rotation.

Remarques

1. Dans les cas 3 à 7, les systèmes ont le même indice $(2, 0, 0)$. Ils sont conjugués.
2. Comme nous l'avons souligné, certaines caractéristiques des flots s'observent aisément sur les portraits de phases, d'autres sont plus délicats à observer : leur mise en évidence peut exiger un « zoom ».
3. Les divers cas ci-avant se rattachent aux 14 cas décrits au § 5.2 :
 - (a) 1^{er} cas ci-avant : cas 5 du § 5.2 ;
 - (b) 2^e cas ci-avant : cas 3 du § 5.2 ;
 - (c) 3^e, 4^e et 5^e cas ci-avant : cas 1 du § 5.2 ;
 - (d) 6^e cas ci-avant : cas 8 du § 5.2 ;
 - (e) 7^e cas ci-avant : cas 12 du § 5.2.

PROPRIÉTÉS LOCALES DU FLOT

6

6.1 INTRODUCTION

Au cours des chapitres précédents, nous avons donné quelques résultats sur les systèmes non-linéaires, et traité exhaustivement et analytiquement la stabilité des systèmes linéaires.

Nous allons dans ce chapitre approfondir notre analyse des systèmes quelconques. Nous ne rechercherons pas des solutions analytiques, mais recueillerons le fruit du travail fait sur les systèmes linéaires. Car les systèmes non-linéaires conservent certaines propriétés des systèmes linéaires par l'intermédiaire de la linéarisation, toujours possible pour des systèmes de classe C^1 et fructueuse au voisinage de ce que nous appellerons les équilibres hyperboliques.

6.2 GÉNÉRALITÉS ET EXEMPLES

6.2.1 Hamiltonien

En premier lieu, quelques rappels peuvent être utiles. L'analyse d'un système mécanique à n degrés de liberté évoluant *sans frottement* peut être conduite en faisant intervenir :

- n **coordonnées généralisées** q_i , fonctions de distances et angles qui définissent la configuration et la position du système ;
- le **lagrangien** du système, fonction $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ des q_i , de leurs dérivées temporelles $\dot{q}_i$ et du temps. Le lagrangien est égal à $T - V$, différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle.

La mise en équation du système fait apparaître le lagrangien et se traduit par les équations d'Euler-Lagrange : $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$, qui sont d'ordre deux (intervention des dérivées secondes des q_i par rapport au temps). Cette approche s'appelle la mécanique lagrangienne.

Mais il y a une autre approche, la mécanique hamiltonienne, qui offre l'avantage de s'exprimer par un système du premier ordre. Elle met en jeu, outre les coordonnées généralisées q_i :

- les **moments conjugués** définis par $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ et homogènes à des quantités de mouvement. En formulation hamiltonienne (alinéas suivants), c'est le couple (q_i, p_i) qui intervient.

- l'**hamiltonien** $H(q_i, \dot{q}_i, t) = \sum_{k=1}^n \dot{q}_k p_k - L(q_i, \dot{q}_i, t)$, qui est aussi l'énergie totale $T + V$ du système, somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle si L ne dépend pas du temps.

Une fois exprimé l'hamiltonien, les équations d'évolution du système, dites **équations canoniques** d'Hamilton, prennent la forme particulièrement simple suivante :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} ; \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} ; \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Cette approche s'adapte aux cas de la mécanique classique et de la mécanique quantique. On notera que la troisième équation s'obtient immédiatement en dérivant par rapport au temps l'expression de H .

6.2.2 Flot hamiltonien

Constance de l'hamiltonien

Gardant les hypothèses et notations précédentes, on a :

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial t} \text{ et, compte tenu de l'encadré précédent :} \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} \right)}_{=0} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \end{aligned}$$

Dans le cas où le lagrangien est fonction des seules coordonnées généralisées, on a $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, d'où $\frac{dH}{dt} = 0$, ce qui signifie que dans ce cas **l'hamiltonien est constant sur toute trajectoire**. En d'autres termes, il y a conservation de l'énergie totale du système. Pour cette raison, le système est dit **conservatif** comme nous l'avons déjà indiqué au paragraphe 1.2.3. Nous allons retrouver un peu plus loin une autre justification de ce qualificatif, rencontré aussi au § 2.3.3.

Cas d'un champ dérivant d'un potentiel

Au paragraphe 1.2.3, nous avons évoqué deux exemples (oscillateur harmonique et pendule simple) de système mécanique évoluant sans frottements dans un champ de forces, et avons écrit à cette occasion $\frac{d^2 q}{dt^2} = -\nabla V(q)$; cette équation signifie que le champ de forces **dérive d'un potentiel**. Dans ce cas, le système possède une énergie totale constante : nous savons qu'il s'agit de son hamiltonien.

Reprenons cette approche dans le cas général.

On a $\frac{d^2 q}{dt^2} = -\nabla V(q)$, avec $q \in \mathbb{R}^n$, V étant le potentiel. L'hamiltonien s'écrit alors,

moyennant un choix convenable des unités : $H(q, p) = T + V = \frac{\|p\|^2}{2} + V(q)$, somme des énergies cinétique et potentielle.

Des équations canoniques et de l'équation précédente, on déduit :

– d'une part $\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i = p_i$, d'où $p = \dot{q}$ dans $\mathbb{R}^n$;

– d'autre part $-\frac{\partial H}{\partial q_i} = \dot{p}_i = -(\nabla V)_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$.

Dès lors, on rentre dans le formalisme adopté dans ce livre en considérant $x = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$, qui appartient à $\mathbb{R}^{2n}$. En effet, nous avons l'équation d'évolution du système :

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ -\nabla V(q) \end{pmatrix}$$

qui est bien de la forme $\dot{x} = f(x)$.

La dérivée temporelle $\frac{dH}{dt}$ de l'hamiltonien est égale au produit scalaire $\nabla H \cdot f$ (§ 6.3.1).

Or, $\nabla H = \nabla \left(\frac{\|p\|^2}{2} + V(q) \right) = \begin{pmatrix} \nabla V \\ p \end{pmatrix}$, vecteur de $\mathbb{R}^{2n}$ dont les deux « composantes »

sont de dimension n . On a donc $\frac{dH}{dt} = \nabla H \cdot f = \begin{pmatrix} \nabla V \\ p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ -\nabla V \end{pmatrix} = 0$ (produit scalaire dans $\mathbb{R}^{2n}$). On retrouve le fait que l'hamiltonien est **constant** sur toute trajectoire. Le flot est alors dit **hamiltonien**.

Exemples de systèmes hamiltoniens

- Pendule simple, déjà évoqué à plusieurs reprises : il est associé au potentiel $V(q) = -\cos q$
- Oscillateur de Duffing : également de dimension 1, il est associé au potentiel $V(q) = -q^2/2 + q^4/4$.

Incompressibilité du fluide hamiltonien

Le champ de vecteurs $x \mapsto f(x)$ a pour divergence : $\text{Div } f = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_k} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \dot{p}_k}{\partial p_k}$.

Mais il résulte des équations canoniques que
$$\begin{cases} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial q_k} \\ \frac{\partial \dot{p}_k}{\partial p_k} = -\frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial p_k} \end{cases}$$

Par conséquent, $\text{Div } f = 0$. Si on interprète f comme le champ des vitesses d'un fluide, on constate donc que « le fluide hamiltonien est incompressible », ce qui constitue le **théorème de Liouville**.

Nous rappelons que, si f est le champ des vitesses d'un fluide, $\text{Div } f = \frac{d(\ln v)}{dt}$, où v est le volume massique, c'est-à-dire l'inverse de la masse volumique. L'incompressibilité implique donc l'invariance d'un « volume fluide », c'est-à-dire du volume de tout compact de l'espace des phases (au sens de : mesure dans $\mathbb{R}^{2n}$) lors de son évolution dans le temps, comme nous l'avons vu au § 2.3.3. Conservatif au sens de la constance de l'hamiltonien, le système l'est donc aussi au sens de l'invariance volumique dans l'espace des phases.

Équilibres d'un système hamiltonien

Un flot hamiltonien étant incompressible (c'est-à-dire tel que $\text{Div } f = 0$), il est naturel de s'interroger sur la nature des équilibres éventuels d'un flot incompressible. Quelques remarques préliminaires s'imposent.

1. Un flot incompressible peut n'avoir aucun équilibre.
C'est le cas, pour a non nul appartenant à $\mathbb{R}^n$, du système $\dot{x} = a$.
2. Un flot incompressible peut avoir des équilibres stables.
C'est le cas sur $\mathbb{R}^n$ du système $\dot{x} = 0$ (tout point est un équilibre)
ou sur $\mathbb{R}^2$ du système $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x$.
3. Un flot incompressible peut avoir des équilibres instables.
C'est le cas sur $\mathbb{R}^2$ du système $\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x$.
4. Un flot compressible peut avoir un équilibre instable même si tout volume fluide décroît en fonction du temps.
C'est le cas sur $\mathbb{R}^2$ du système $\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x$, pour lequel tout volume fluide tend vers 0.

Une fois ces préliminaires énoncés, donnons une caractéristique majeure des systèmes hamiltoniens :

Soit S un système conservatif d'hamiltonien $H(q, p) = \frac{\|p\|^2}{2} + V(q)$, où le potentiel V est une fonction de classe C^1 de la position $q \in \mathbb{R}^n$, et admet un minimum strict V_m pour $q = q_0$.

Dans ces conditions : $x_0 = (q_0, 0)$ est un équilibre *stable* mais *pas* asymptotiquement stable du système.

La démonstration de ce résultat fait l'objet de l'exercice suivant.

Exercice 6.1 Équilibre d'un système hamiltonien

Soit un système conservatif d'hamiltonien $H(q, p) = \frac{\|p\|^2}{2} + V(q)$, où le potentiel V est une fonction de classe C^1 de la position $q \in \mathbb{R}^n$.

On rappelle alors que, si $x = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$, on a $\dot{x} = f(x) = \begin{pmatrix} p \\ -\nabla V \end{pmatrix}$.

On suppose que le potentiel V admet un minimum strict V_m pour $q = q_0$.

1. Vérifier que $x_0 = (q_0, 0)$ est un équilibre stable du système.
2. (a) Expliciter la matrice ∇f_{x_0}
(b) Quel est son spectre ?
3. Montrer que x_0 n'est pas asymptotiquement stable.

Les équilibres stables d'un système conservatif du type décrit dans l'exercice 6.1 ne sont pas asymptotiquement stables (question 3 de l'exercice). Mais ils peuvent le devenir par introduction d'un **amortissement** dû par exemple à un frottement. Le système n'est alors plus conservatif, il devient **dissipatif**, notion déjà évoquée au paragraphe 2.3.3.

Dans un système dissipatif, le volume de tout compact de l'espace des phases ne peut que décroître avec le temps, ce qui s'accorde bien avec l'intuition dans le cas par exemple de trajectoires spirales centripètes.

6.3 THÉORIE DE LIAPOUNOV DE LA STABILITÉ

La théorie de Liapounov permet de déduire la stabilité d'un système, voire sa stabilité asymptotique, de l'existence d'une fonction attachée à l'état du système, et décroissant avec le temps. Nous appellerons *fonction de Liapounov* une telle fonction. L'idée sous-jacente est de généraliser une constatation que la simple expérience du pendule nous permet déjà de faire :

- un pendule non amorti oscille indéfiniment ; il représente un système stable, non asymptotiquement stable. Dans son mouvement, son énergie mécanique reste constante.
- un pendule amorti en revanche présente des oscillations dont l'amplitude tend vers zéro. L'état (position, vitesse) tend vers l'état « position basse » qui est un équilibre asymptotiquement stable. Le système est dissipatif. L'énergie mécanique diminue : elle se transforme en chaleur en vertu du premier principe de la thermodynamique.

Il est naturel de chercher à prolonger cette approche intuitive par des définitions et résultats rigoureux : c'est ce que réalise la notion de fonction de Liapounov, qui généralise celle d'énergie mécanique d'un système conservatif ou dissipatif.

Intermède historique : Alexandre Liapounov et la notion moderne de stabilité

Alexandre Liapounov (Lyapunov dans la littérature anglo-saxonne), mathématicien russe (1857-1918), fils d'astronome, a consacré une grande part de sa carrière, dès son travail de thèse, aux problèmes de stabilité. Il a notamment introduit la notion moderne de stabilité des systèmes dynamiques, donné avec les « fonctions de Liapounov » un outil efficace d'analyse, et proposé une évaluation de la divergence entre deux trajectoires voisines : nombre et exposant de Liapounov. Il a également apporté une contribution notable à la théorie des probabilités. Liapounov a mis fin à ses jours à 61 ans après le décès de sa femme.

6.3.1 Dérivée de Lie, dérivée particulaire

La définition d'un système autonome, donc du champ de vecteurs $\dot{x} = f(x)$, peut s'interpréter comme la donnée du champ de vitesses d'un écoulement fluide permanent dans $\mathbb{R}^n$. L'évolution de l'état représente le mouvement d'une particule fluide. Changer de condition initiale revient à changer de particule. Aussi, ne serait-ce que pour faire le lien avec des notions classiques de mécanique des fluides, allons-nous rappeler (ou simplement donner) quelques définitions qui seront utiles pour la suite.

Nous avons vu en début de document que l'état est « transporté par le flot » à l'image d'une particule transportée par le champ de vitesses, selon l'équation :

$$x(t) = \phi(t, x_0),$$

où x_0 représente l'état initial $x(0)$. Dès lors, toute fonction réelle F de l'état évolue avec lui : la fonction $t \mapsto F[\phi(t, x_0)]$ dépend des deux variables x_0 et t . Une fois choisi l'état initial x_0 , suivons l'état dans son évolution, c'est-à-dire la particule dans son mouvement. La fonction F varie et sa dérivée par rapport au temps, lorsqu'elle existe, est :

$$\dot{F} = \frac{\partial F[\phi(t, x_0)]}{\partial t}.$$

Dans les applications mécaniques, cette dérivée notée aussi Df/Dt est pour les raisons indiquées appelée **dérivée particulière**.

Si F est de classe C^1 dans Ω , elle possède un gradient ∇F relativement à x , et on a, par dérivation d'une fonction composée, le résultat classique : $\frac{DF}{Dt} = \nabla F \cdot f$

Dans le cas général d'un système qui n'est pas nécessairement mécanique, cette dérivée est aussi appelée **dérivée de Lie**.

Remarque

Si la fonction F dépend non seulement de l'état x mais aussi du temps t , il convient d'ajouter au terme $\nabla F \cdot f$, appelé aussi **dérivée convective**, la dérivée partielle de F par rapport au temps à x constant, qu'on appellera **dérivée locale** ou **dérivée eulérienne**.

$$\text{On a alors : } \underbrace{\frac{DF}{Dt}(t, x)}_{\text{dérivée particulière}} = \underbrace{\frac{\partial F(t, x)}{\partial t}}_{\text{dérivée locale}} + \underbrace{\nabla F(t, x) \cdot f}_{\text{dérivée convective}}$$

Comme le présent document est centré sur les systèmes autonomes, (f fonction de x et non de t), les fonctions F que nous considérerons seront elles aussi fonctions du **seul état** x ; leur dérivée locale sera donc nulle.

Une fois x_0 choisi, c'est-à-dire une fois la trajectoire choisie, F dépend seulement de t , et on allègera l'écriture en notant : $F[\phi(t, x_0)] = F(t)$.

La dérivée de Lie $\frac{\partial F[\phi(t, x_0)]}{\partial t}$ sera elle-même notée plus simplement $\frac{dF}{dt}$ ou $\dot{F}$ et appelée encore **dérivée temporelle** de F .

En résumé, les quatre expressions suivantes sont synonymes dans le cas d'une fonction F de l'état d'un système autonome :

- dérivée particulière
- dérivée convective
- dérivée de Lie
- dérivée temporelle

De tout ce qui précède, on retiendra : $\boxed{\dot{F} = \nabla F \cdot f}$,

formule importante qui permet le calcul pratique de la dérivée temporelle de F .

6.3.2 Fonctions de Liapounov

Soit x_0 un équilibre du système $\dot{x} = f(x)$, de classe C^1 sur le domaine Ω .

Soit F une fonction définie et continue dans un voisinage V de x_0 et à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- elle admet un **minimum strict** en x_0 , c'est-à-dire :

$$\forall x \in V - \{x_0\}, \text{ on a } F(x) > F(x_0)$$

- elle est de classe C^1 sur $V - \{x_0\}$, et sa dérivée temporelle y est **négative** ou **nulle**, c'est-à-dire : $\forall x \in V - \{x_0\}, \text{ on a } \dot{F} = \nabla F \cdot f \leq 0$

Une telle fonction, pour laquelle on a nécessairement $\dot{F}(x_0) = 0$, est appelée **fonction de Liapounov**.

Nous allons montrer que la simple existence d'une fonction de Liapounov au voisinage de l'équilibre x_0 implique la stabilité de l'équilibre x_0 . Ce résultat important constitue un théorème de Liapounov : nous en énoncerons ensuite un autre relatif au *système linéarisé*, notion qui fera l'objet d'un prochain paragraphe.

Premier théorème de Liapounov

S'il existe une fonction de Liapounov F dans un voisinage V de x_0 , équilibre du système $\dot{x} = f(x)$ de classe C^1 , alors :

x_0 est un équilibre stable du système.

Si de plus la dérivée temporelle de F est strictement négative hors de x_0 :

x_0 est un équilibre asymptotiquement stable.

La démonstration fera appel à deux lemmes.

Lemme a)

V contient une boule fermée $\Delta = B(x_0, R)$ de centre x_0 et de rayon R , donc aussi, pour tout $\varepsilon < R$, une « couronne » fermée $\Gamma = \{x \in \Delta ; \|x - x_0\| \geq \varepsilon\}$ centrée sur x_0 .

Comme F est continue sur le compact Γ , $F(x) - F(x_0)$ y atteint son minimum $2\alpha > 0$, où $\alpha > 0$. Ceci implique :

$$\forall \varepsilon \in]0, R[, \exists \alpha(\varepsilon) \text{ tel que } \forall x \in \Delta, \|x - x_0\| \geq \varepsilon \implies F(x) - F(x_0) > \alpha,$$

qui équivaut à :

$$\forall \varepsilon \in]0, R[, \exists \alpha(\varepsilon) \text{ tel que } \forall x \in \Delta, F(x) - F(x_0) \leq \alpha \implies \|x - x_0\| < \varepsilon.$$

• Cas $\dot{F} \leq 0$: stabilité de x_0

Fixons ε . D'après le lemme a), il existe $\alpha(\varepsilon) > 0$ tel que :

$$\forall x \in \Delta, F(x) - F(x_0) \leq \alpha \implies \|x - x_0\| < \varepsilon$$

F est continue en x_0 . Par conséquent, $\alpha > 0$ étant celui précédemment déterminé, il existe $\eta(\alpha) > 0$ tel que : $\|x - x_0\| \leq \eta(\alpha) \implies F(x) - F(x_0) < \alpha$.

Dès lors, si on choisit un état initial a dans la boule ouverte $\mathcal{B}(x_0, \eta(\alpha))$, alors $F(a) - F(x_0) \leq \alpha$. Mais F a une dérivée temporelle négative. Par conséquent :

$\forall t > 0, F[x(t)] - F(x_0) \leq F(a) - F(x_0) \leq \alpha$. Alors, d'après le lemme a) :

$\forall t > 0, \|x(t) - x_0\| \leq \varepsilon$. Comme η est fonction de α , donc de ε , le résultat obtenu montre que **x_0 est un équilibre stable**, ce qui établit le premier volet du théorème.

Lemme b)

Ce lemme n'est autre qu'une variante du lemme a), avec les correspondances : $F(x) - F(x_0) \rightarrow -\dot{F}(x)$, et $\alpha \rightarrow \beta$: donc, 2β est le minimum de $-\dot{F}(x)$ sur Γ . On obtient ainsi :

$$\forall \varepsilon \in]0, R[, \exists \beta(\varepsilon) \text{ tel que } \forall x \in \Delta, \dot{F}(x) \geq -\beta(\varepsilon) \implies \|x - x_0\| < \varepsilon.$$

• Cas $\dot{F} < 0$: stabilité asymptotique de x_0

En utilisant convenablement l'hypothèse $\dot{F} < 0$ ainsi que le lemme b), on montre qu'il existe un voisinage V de x_0 , fonction de ε , tel que pour tout $x \in V$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists T(x, \varepsilon) \text{ tel que } t \geq T(x, \varepsilon) \implies \|\phi(t, x) - x_0\| < \varepsilon.$$

Donc, x_0 est *asymptotiquement stable*.

Exemples

1. Soit le système $\dot{x} = 0$ sur $\Omega = \mathbb{R}$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction $F(x) = (x - a)^2$ admet un minimum strict en a et a pour dérivée temporelle $\dot{F} = \nabla F \cdot f = 0 \leq 0$. Par conséquent, tout réel a est un équilibre **stable** (mais non asymptotiquement) du système, ce qui était évident *a priori* pour ce système particulièrement simple.
2. Soit le système $\dot{x} = -x$ sur $\Omega = \mathbb{R}$: la fonction $F(x) = x^2$ admet un minimum strict en $x_0 = 0$, et a pour dérivée temporelle $\dot{F} = \nabla F \cdot f = -2x^2 \leq 0$. Comme $\dot{F} < 0$ hors de x_0 , 0 est un équilibre **asymptotiquement stable** du système.
3. Sur $\Omega = \mathbb{R}^2$, la fonction $F(x) = \|x\|^2$ est une fonction de Liapounov pour le système $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x$. En effet, $\nabla F \cdot f = 0$, d'où $\dot{F} = 0$, ce qui montre la **stabilité** de l'équilibre 0 (qui n'est pas asymptotiquement stable).

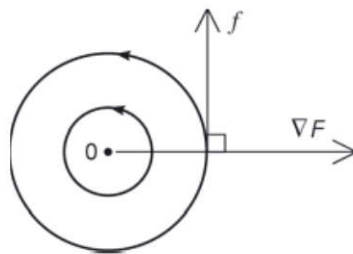


Figure 6.1 - Des orbites circulaires.

4. Sur $\Omega = \mathbb{R}^2$, la fonction $F(x) = \|x\|^2$ est une fonction de Liapounov pour le système $\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & -\omega \\ \omega & -1 \end{pmatrix} x$. En effet, pour $x \neq 0$, on a $\nabla F \cdot f = -2(x_1^2 + x_2^2) < 0$, d'où $\dot{F} < 0$, ce qui montre la **stabilité asymptotique** de l'équilibre 0.



Figure 6.2 - Des orbites spirales convergentes.

Il va de soi que dans de nombreux cas, la recherche d'une fonction de Liapounov peut s'avérer très délicate, voire impossible comme le met en lumière l'exercice suivant.

Exercice 6.2 Un équilibre stable mais sans fonction de Liapounov

Le but de l'exercice est de montrer qu'autour de certains équilibres stables, il est impossible de trouver une fonction de Liapounov.

On considère le système monodimensionnel de classe C^1 suivant :

$$f(x) = x^3 \sin^2 \frac{1}{x} \text{ avec } f(0) = 0, \text{ déjà évoqué dans l'exercice 3.2.}$$

1. Montrer qu'au voisinage de l'équilibre 0, il est **impossible** de trouver une fonction de Liapounov malgré la stabilité de cet équilibre.
2. Généraliser cet exemple à $\mathbb{R}^n$.

6.4 LINÉARISATION AUTOUR DES ÉQUILIBRES

Nous avons vu qu'en vertu du théorème du redressement le comportement local d'un système ne pouvait offrir quelque complexité qu'au voisinage d'un équilibre. Or, l'étude que nous avons faite des systèmes **linéaires** au voisinage d'un équilibre permet une classification exhaustive du comportement local, tout au moins en regard de la notion de stabilité.

Pour un système **non-linéaire**, il est donc légitime d'étudier si la linéarisation au voisinage d'un équilibre conserve ou non les propriétés qualitatives liées à la stabilité. Nous verrons que c'est le cas pour une large classe de systèmes, mais que cette constatation n'est toutefois pas universelle.

6.4.1 Définition de la linéarisation

Soit S le système $\dot{x} = f(x)$ de classe C^1 dans un voisinage d'un point x_1 .

Le développement de Taylor-Lagrange de f à l'ordre 1 est :

$$f(x) = f(x_1) + \nabla f_{x_1}(x - x_1) + o(x - x_1)$$

6.4. Linéarisation autour des équilibres

Rappelons que ∇f , différentielle de f , est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Si on appelle f_i les n composantes de f , il est représenté par la matrice :

$$\nabla f_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

- Si x_1 est régulier, $f(x_1) \neq 0$: cette constante non nulle est alors la partie principale de f . On sait par le théorème du redressement qu'au voisinage de x_1 , le système est le conjugué d'un système à flot constant. Le comportement local est donc qualitativement très simple, ceci *quel que soit* ∇f_{x_1} .
- Si en revanche x_1 est un équilibre (qu'on notera alors x_0), $f(x_0) = 0$. Dans ce cas, $f(x) = \nabla f_{x_0}(x - x_0) + o(x - x_0)$, expression qui conduit à la définition ci-dessous, qui fait intervenir le « champ linéaire tangent » ∇f_{x_0} ou différentielle de f en x_0 . On vient d'en rappeler l'expression matricielle.

Si x_0 est un équilibre du système S , le système $\dot{x} = \nabla f_{x_0}(x - x_0)$ est la meilleure **approximation affine locale** du système (au sens de « champ de vecteurs f ») au voisinage de x_0 . Elle est de type affine, et conserve à x_0 son statut d'équilibre. Une simple translation du nouvel état permet d'amener l'équilibre au point 0, d'où la définition :

Soit S le système $\dot{x} = f(x)$, avec $x \in \Omega$ domaine de $\mathbb{R}^n$, et $f \in C^1(\Omega)$.

Le **système linéarisé** S_L de S à l'équilibre $x_0 \in \Omega$ est le système d'équation :

$$\dot{x} = \nabla f_{x_0}(x)$$

C'est un système **linéaire**, dont l'équation prend la forme matricielle :

$$\dot{x} = \nabla f_{x_0} \cdot x$$

Remarques

1. Si S est linéaire, on a $\dot{x} = A x$, et $\nabla f_{x_0} = A$ en tout x_0 , donc en tout équilibre.
2. La linéarisation transforme x_0 , équilibre de S , en 0 qui est nécessairement équilibre de S_L car ce nouveau système est linéaire.
3. La linéarisation n'a de valeur que **locale** : en particulier S_L a comme espace d'états $\mathbb{R}^n$, ce qui fait perdre les propriétés topologiques de Ω , espace des états de S , si ce dernier n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}^n$. C'est le cas, nous l'avons déjà vu, si l'une des composantes de x est un angle, élément de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et non de $\mathbb{R}$. C'est aussi le cas par exemple si Ω est une couronne ouverte du plan.

6.4.2 Changements de comportement par linéarisation

Nous allons donner deux exemples introductifs qui montrent que la linéarisation *ne conserve pas toujours* la nature des équilibres.

Exemples

1. Le système de dimension 1 ($x \in \mathbb{R}$) : $\dot{x} = x^2$ possède l'équilibre unique instable $x_0 = 0$. Son linéarisé en 0 est simplement le système $\dot{x} = 0$, qui admet tout réel, donc en particulier 0, comme équilibre stable. La linéarisation a donc remplacé un équilibre **instable** par un équilibre **stable**.
2. Le système de dimension 2 suivant :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} - (x^2 + y^2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

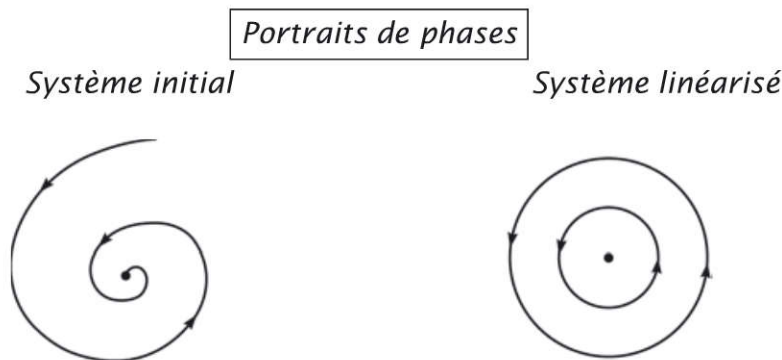
admet 0 comme équilibre unique.

La fonction $F(x, y) = x^2 + y^2$ a pour dérivée temporelle $\dot{F} = \nabla F \cdot f$, dont la valeur, obtenue par un calcul très simple, est $-2(x^2 + y^2)^2 < 0$ pour $z \neq 0$. D'après le théorème de Liapounov, 0 est un équilibre asymptotiquement stable.

La différentielle de f est $\nabla f = \begin{pmatrix} -3x^2 - y^2 & -2xy - 1 \\ -2xy + 1 & -3y^2 - x^2 \end{pmatrix}$

Donc, $\nabla f(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On retrouve une modélisation de l'oscillateur harmonique.

Les trajectoires sont des cercles concentriques : 0 est un équilibre stable. La linéarisation a remplacé un équilibre **asymptotiquement stable** par un équilibre **simplement stable**.



Système initial

Système linéarisé

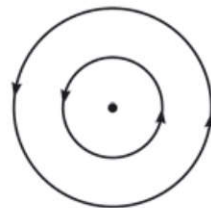
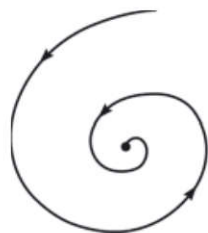


Figure 6.3 – Perte de la stabilité asymptotique dans l'exemple 2.

6.5 LINÉARISATION AUTOUR DES ÉQUILIBRES HYPERBOLIQUES

Les exemples qu'on vient de donner de changement de comportement ont un point commun : les valeurs propres de ∇f_{x_0} sont de **partie réelle nulle**. Nous allons voir que c'est la cause de la non-robustesse du système.

Définition

On appelle **équilibre hyperbolique** du système de classe C^1 : $\dot{x} = f(x)$ un équilibre x_0 tel que les valeurs propres de ∇f_{x_0} ne soient pas de partie réelle nulle.

Exprimé de façon équivalente :

l'équilibre x_0 est hyperbolique $\iff$ l'endomorphisme ∇f_{x_0} est hyperbolique
 (notion définie au paragraphe 4.2.3)
 $\iff$ l'indice de ∇f_{x_0} est du type $(n^-, 0, n^+)$.

6.5.1 Deuxième théorème de Liapounov

Le deuxième théorème de Liapounov fait référence au système linéarisé $\dot{x} = \nabla f_{x_0} \cdot x$.

Il permet de conclure quant à la nature de l'équilibre x_0 si celui-ci est hyperbolique, c'est-à-dire si le spectre de ∇f_{x_0} ne rencontre pas l'axe imaginaire.

La terminologie «premier théorème» et «deuxième théorème» n'est pas générale. Elle est utilisée ici dans un simple souci d'identification correcte des deux théorèmes.

Deuxième théorème de Liapounov

Soit x_0 un équilibre du système S (linéaire ou non) de classe C^1 .

- Si $\text{Sp}(\nabla f_{x_0}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(\lambda) < 0\}$, x_0 est asymptotiquement stable pour S .
- Si $\text{Sp}(\nabla f_{x_0}) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(\lambda) > 0\} \neq \emptyset$, x_0 est instable pour S .

Schéma de démonstration

Nous allons donner les points-clés d'une démonstration, sans en développer les détails techniques.

Dans un premier temps, on dote $\mathbb{R}^n$ d'une structure euclidienne adaptée à notre analyse. Cette structure euclidienne est étroitement associée à la base de Jordan. Elle fait l'objet de la partie « lemme d'encadrement » de l'annexe 5. Elle assure que le carré de la distance à l'équilibre est une **fonction de Liapounov** si le système linéarisé est asymptotiquement stable. Dès lors, le 1^{er} théorème de Liapounov nous fournit le premier volet du 2^e théorème :

- **Si $\text{Sp}(\nabla f_{x_0}) \subset \{\lambda \mid \text{Re}(\lambda) < 0\}$, x_0 est asymptotiquement stable.**

Pour l'établissement du deuxième volet, on utilise la décomposition de $E = \mathbb{R}^n$ (dans lequel opère ∇f_{x_0}) en : $\mathbb{R}^n = E_s \oplus E_c \oplus E_u$, sous-espaces stable, central et instable, comme nous l'avons vu au chapitre 4. Regroupons-les en $E_0 = E_s \oplus E_c$ et $E_1 = E_u$; on

a ainsi $E = E_0 \oplus E_1$. L'idée de la démonstration est la suivante. On observe l'évolution de $x_0 + h$, où h est :

- suffisamment petit pour une application efficace de la formule de Taylor-Young à $x(t)$ au 1^{er} ordre. Pour cela, on choisit h dans une boule ouverte $B = B(x_0, \eta)$ convenable.
- beaucoup plus près de E_1 que de E_0 , ce qui, h_i étant la projection de h sur E_i , s'exprime $\|h_1\| \gg \|h_0\|$. On privilégie ainsi l'aspect instable, ce qui empêchera de cantonner $x(t) = x_0 + h(t)$ dans un voisinage de x_0 . On prendra donc h dans un ouvert $C = \{h ; \|h_1\|^2 > K \|h_0\|^2\}$, avec $K > 0$ convenablement choisi.

On satisfait les deux exigences en prenant h dans l'ouvert $U = B \cap C$. On vérifie alors que $x(t)$, tant qu'il reste dans B , s'éloigne exponentiellement de x_0 : il existe un voisinage de x_0 que $x(t)$ quitte nécessairement. Par conséquent, **x_0 est un équilibre instable.**

On a ainsi établi le deuxième volet :

- **Si $Sp(\nabla f_{x_0}) \cap \{\lambda | \operatorname{Re}(\lambda) > 0\} \neq \emptyset$, x_0 est instable.**

Ceci achève la démonstration du deuxième théorème de Liapounov.

Nous disposons ainsi de deux théorèmes dits de Liapounov qui renseignent sur la nature des équilibres. Il faut noter que le premier théorème fait référence à une fonction de Liapounov, mais pas au spectre du système linéarisé. On peut donc *a priori* en attendre une plus grande généralité, au prix toutefois d'une mise en oeuvre moins systématique. En effet, si l'on peut généralement accéder au spectre de ∇f , il n'existe en revanche pas de procédé universel de construction d'une fonction de Liapounov ; et, nous l'avons vu, une telle fonction peut ne pas exister.

En conclusion, la nature stable ou instable d'un équilibre hyperbolique est la même pour un système et pour son linéarisé. En revanche, pour un système non hyperbolique, tous les cas de stabilité existent, ceci dès la dimension 1.

Exemples

Pour les quatre systèmes unidimensionnels ($E = \mathbb{R}$) ci-après, $x_0 = 0$ est un équilibre non hyperbolique, car dans tous les cas il est associé à la valeur propre 0.

1. $\dot{x} = -x^3$: x_0 est asymptotiquement stable ;
2. $\dot{x} = 0$: x_0 est stable (mais pas asymptotiquement stable) ;
3. $\dot{x} = x^2$: x_0 est instable (en fait : semi-stable) ;
4. $\dot{x} = x^3$: x_0 est instable.

Ces quatre systèmes ont le **même linéarisé** : $\dot{x} = 0$, pour lequel 0 est simplement stable.

Problème 6.1 Un système polynomial de dimension 2

On considère le système non-linéaire $S : \begin{cases} \dot{x} = y(1 - y) \\ \dot{y} = x(1 - x) \end{cases}$

On notera $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ l'état du système, $f(z)$ la fonction $z \mapsto \dot{z}$.

1. Déterminer les équilibres du système.
2. (a) Vérifier que le flot $\dot{z}$ est symétrique par rapport à la droite D d'équation $y = x$.
(b) Vérifier que D est invariante par le flot.
(c) Sur D , le système se réduit à un système de dimension 1 qu'on paramètrera par x . Le résoudre analytiquement pour la condition initiale $x_0 = -1$; montrer alors que la trajectoire explose à un instant fini t_1 qu'on déterminera.
3. (a) Linéariser S au voisinage de chacun des équilibres ; quelle est la nature des équilibres des systèmes linéarisés ?
(b) Que peut-on en déduire quant à la nature des équilibres de S ?
4. Déterminer l'isocline horizontale I_h , ensemble des points où la tangente à une orbite est horizontale. Déterminer de même l'isocline verticale I_v .
5. Esquisser un possible portrait de phases du système, conforme aux conclusions des questions précédentes. Donner un (des) exemple(s) de question(s) sans réponse à ce stade de l'étude.

6.5.2 Théorème de Hartman-Grobman

Le 2^e théorème de Liapounov établit que l'identité de la nature (stable ou instable) d'un équilibre hyperbolique est la même pour un système et pour son linéarisé. Il ne va cependant *pas jusqu'à la conjugaison* des deux systèmes, notion plus riche. Car au voisinage de deux équilibres instables, deux systèmes peuvent ne pas être conjuguables. Par exemple, la figure 6.4 représente les trajectoires de deux systèmes d'ordre 2. Les spectres de ∇f au voisinage des équilibres sont $(1, 1)$ (figure de gauche) et $(-1, 1)$ (figure de droite). Bien que les deux équilibres soient instables, les deux systèmes ne sont pas conjugués, ce que la différence qualitative des deux champs illustre bien.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



Figure 6.4 – Deux équilibres instables non conjugués.

Le théorème de Hartman-Grobman, qui met en jeu une conjugaison, est plus fort que les théorèmes de Liapounov et son énoncé est simple. Nous le donnons sans démonstration ; celle-ci se trouve dans des ouvrages plus spécialisés.

Théorème de Hartman-Grobman

Un système de classe C^1 est localement topologiquement conjugué à son linéarisé au voisinage d'un équilibre hyperbolique.

Ce théorème possède la limitation suivante : on n'obtient pas nécessairement une plus grande régularité de la conjugaison, c'est-à-dire le fait qu'elle soit de classe C^p (avec $p \geq 1$) en augmentant la régularité du système. Il peut en effet apparaître un phénomène appelé résonance défini ci-après, phénomène dont le Système Solaire en tant que système dynamique offre de nombreux exemples.

Résonance

Soit A un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, de valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Les λ_i appartiennent à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, chacune étant comptée un nombre de fois égal à sa multiplicité. On dit que A présente une **résonance d'ordre k** ($k \geq 2$) s'il existe un entier $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et des entiers naturels α_j tels que $\lambda_i = \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n$, avec $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = k$.

L'existence d'une résonance ne permet pas de garantir une conjugaison d'ordre supérieur ou égal à 1 du système initial S avec son linéarisé, ceci même si le système non-linéaire initial est de classe C^∞ .

Par exemple, pour le système S bidimensionnel suivant : $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2y + x^2 \end{pmatrix}$, on a $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$. L'égalité $\lambda_2 = 2\lambda_1$ nous place dans le schéma d'une résonance, avec $i = 1$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 0$, d'où l'ordre de résonance $k = 2$. La figure 6.5.a montre les portraits de phases du système S (voir exercice 6.3), la figure 6.5.b celui de son linéarisé S_L .

6.5. Linéarisation autour des équilibres hyperboliques

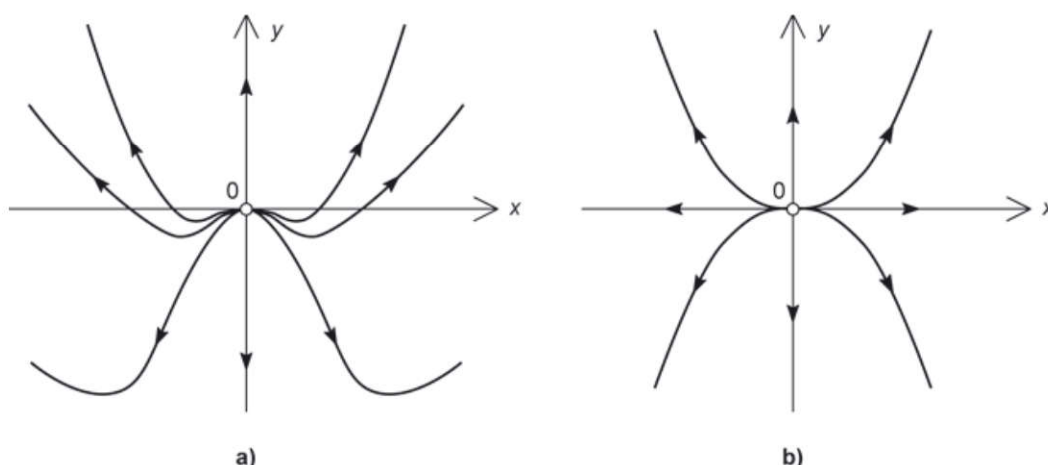


Figure 6.5 – Un système résonant et son linéarisé.

Exercice 6.3 Une résonance en dimension 2

On considère le système S plan : $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = f(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ 2y + x^2 \end{pmatrix}$.

On notera $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

1. Déterminer le linéarisé S_L de S à son équilibre $z_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donner la nature de l'équilibre z_1 pour S_L et pour S .
2. Vérifier que le système S présente en son équilibre z_1 une résonance d'ordre 2.
3. Résoudre analytiquement S en donnant l'expression du flot $\phi(t, z)$. En déduire l'équation des orbites et commenter le portrait de phases déjà esquissé par la figure 6.5.a.

En l'absence de résonance, la situation s'améliore : un résultat dû à Sternberg donne une condition suffisante de conjugabilité de classe C^∞ . Le **théorème de linéarisation de Sternberg** dispose en effet que si f est de classe C^∞ et si le linéarisé S_L ne présente aucune résonance, alors S et S_L sont conjugués de classe C^∞ . Si f est de classe C^p , le résultat est d'énoncé plus complexe : S et S_L sont conjugués de classe C^q , où q est une fonction croissante de p tendant vers l'infini lorsque $p \rightarrow \infty$.

Problème 6.2 *Un système de dimension 2*

Soit $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Le plan $\mathbb{R}^2$ est muni du repère habituel $\mathcal{R}_0 = (\vec{i}, \vec{j})$ ainsi que du repère attaché aux coordonnées polaires : $\mathcal{R}_1 = (\vec{u}, \vec{v})$ (voir figure).

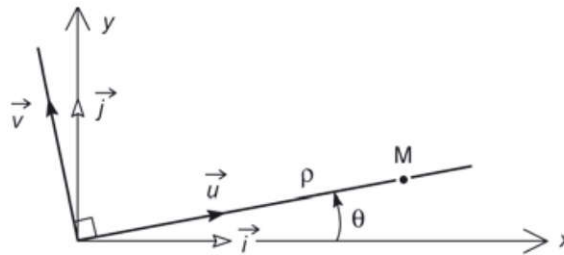


Figure 6.6 - Les repères $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}_1$.

Soit S le système dynamique $\boxed{\dot{z} = f(z)}$. On pose $\rho = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$

Pour $z \neq 0$, le champ f est ainsi défini dans le repère cartésien $\mathcal{R}_1$:

$$f(z) = \begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \rho \dot{\theta} \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} (1 - \rho)(\rho - 2) \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$$

Pour $z = 0$, on définit $f(z) = 0 \in \mathbb{R}^2$.

1. Déterminer l'(les) équilibre(s) du système.
2. Montrer que la fonction $F(z) = \rho^2$ est une fonction de Liapounov dans le disque $\rho < 1$.
3. En déduire la nature de l'équilibre 0.
4. Identifier les trajectoires périodiques du système.
5. Discuter les propriétés géométriques des trajectoires.
6. Tracer le portrait de phases du système.

STRUCTURATION DU FLOT

7

Les chapitres précédents étaient centrées sur les propriétés *locales* du flot d'un système dynamique, qu'un survol permet de résumer comme suit.

- Au voisinage de tout point régulier x_0 (tel donc que $f(x_0) \neq 0$), le flot se comporte comme un flot constant $f(x) = Cte$; « se comporte comme » signifie « est conjugué à ». Ceci est vrai, que le système soit linéaire ou non.
- Au voisinage d'un équilibre :
 - le flot d'un système linéaire s'obtient analytiquement ; la classification des équilibres est donnée par le théorème général de stabilité des systèmes linéaires (§ 4.2.3). Celui-ci met en jeu l'indice de l'endomorphisme, triplet de nombres rassemblant les dimensions des sous-espaces vectoriels stable, central et instable.
 - le flot d'un système non-linéaire est localement conjugué à celui du système linéarisé si l'équilibre est hyperbolique. Dans le cas contraire, tout est possible, y compris le changement de nature de l'équilibre par linéarisation.

Ces résultats, tout intéressants qu'ils soient, ne suffisent pas à esquisser la physiologie d'un champ dans sa globalité. Nous avons en effet déjà observé dès la dimension 2 que deux champs présentant par exemple chacun un équilibre unique, hyperbolique et instable, peuvent ne pas être conjugués, comme le rappelle la figure 7.1.



Figure 7.1 - Deux champs non conjugués.

Il est donc nécessaire, et c'est l'objet de ce chapitre, de définir et d'analyser certaines notions liées aux caractéristiques *globales* du champ.

7.1 ENSEMBLES-LIMITES

Soit un système S localement lipschitzien sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, et x un point de Ω tel que $J(x)$ ne soit pas borné à droite. On appelle **ensemble-limite** de x , ou **ensemble ω -limite** de x , que l'on note $\omega(x)$, l'ensemble :

$$\omega(x) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\{\phi(s, x), s \geq t\}}. \text{ Intersection de fermés, } \omega(x) \text{ est lui-même } \textit{fermé}.$$

$\omega(x)$ est donc l'intersection des branches terminales de l'orbite de x , les temps initiaux de ces branches étant arbitrairement grands. Il est utile de donner une autre caractérisation de $\omega(x)$.

Deux caractérisations équivalentes de $\omega(x)$

Les deux définitions suivantes de l'ensemble-limite $\omega(x)$ de $x \in \Omega$ sont équivalentes :

- $\omega(x) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\{\phi(s, x), s \geq t\}}$
- $\omega(x)$ est l'ensemble des point y de Ω tels qu'il existe une suite réelle (t_n) tendant vers $+\infty$, avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n, x) = y$

Ce résultat s'établit sans difficulté. Sa démonstration fait l'objet de l'exercice 7.1.

La deuxième définition sous-entend que $\phi(t, x)$ reste défini pour $t \rightarrow \infty$, donc que l'ensemble des temps $J(x)$ n'est pas bornée à droite. Il est aisé de surmonter cette restriction : s'il y a un temps t_f d'explosion (ou d'implosion) de la solution, on remplacera $t_n \rightarrow \infty$ par $t_n \rightarrow t_f$.

Exercice 7.1 Deux définitions équivalentes de l'ensemble limite

Démontrer l'équivalence des deux définitions données dans l'encadré ci-avant.

Exemples d'ensembles-limites

1. Les branches terminales d'orbites du système $\dot{x} = \begin{pmatrix} \mu & -\omega \\ \omega & \mu \end{pmatrix} \cdot x$ dans $\mathbb{R}^2$ avec $\mu < 0$ sont des arcs de spirale logarithmique. Leur adhérence contient 0. Ici, $\omega(x) = \{0\}$ pour tout point $x \in \mathbb{R}^2$. On notera que l'intersection des arcs d'orbite eux-même est vide (sauf pour $x = 0$); mais $\omega(x)$ est l'intersection de leur adhérence. En résumé : $\forall x \in \mathbb{R}^2, \omega(x) = \{0\}$. Le tableau II (cas 12, § 5.2) donne un portrait de phases de ce système.

2. Même exemple, mais avec $\mu > 0$. Dans ce cas, les arcs de trajectoire sont des branches infinies de spirale. Fermés, ils coïncident avec leur adhérence. Leur intersection est vide, sauf pour $x = 0$.
En résumé : $\omega(0) = \{0\}$ et $\omega(x) = \emptyset$ pour $x \neq 0$.
3. Dans le système plan décrit par $\begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(1-\rho) \\ 1 \end{pmatrix}$ en coordonnées polaires, l'ensemble $\bigcap_{t \geq 0} \overline{\{\phi(s, x), s \geq t\}}$ est pour ρ différent de 0 et de 1 la réunion d'un arc de spirale et du cercle unité Γ . Pour $\rho = 1$, il s'agit du cercle unité, et pour $\rho = 0$ du point $\{0\}$.
En conclusion : $\omega(0) = \{0\}$ et $\omega(x) = \Gamma$ pour $x \neq 0$.
 Γ est lui-même une orbite correspondant à une trajectoire périodique. On dit que c'est un **cycle-limite**, notion sur laquelle nous reviendrons au paragraphe 7.2.2. La figure 7.1.b représente un portrait de phases du système.
Dans ces trois premiers exemples, un ensemble-limite est toujours une orbite. L'exemple 4 montre que ce n'est pas toujours le cas.
4. Modifions comme suit l'exemple 3 : on se place sur $\Omega = \mathbb{R}^{2*}$. Un point x donné du plan emprunte la même orbite dans le même sens que dans l'exemple précédent, mais à vitesse linéaire $\|\dot{x}\| = |x-1| \cdot |x+1|$. On constate alors que :

$$\omega(x) = \Gamma \text{ si } \|x\| \neq 1;$$

$$\omega(x) = \{-1\} \text{ si } x \text{ appartient au demi-cercle } (\rho = 1, \theta \in]0, \pi]);$$

$$\omega(x) = \{+1\} \text{ si } x \text{ appartient au demi-cercle } (\rho = 1, \theta \in]-\pi, 0]).$$

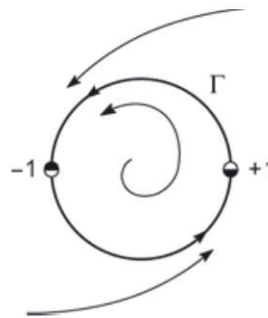


Figure 7.2 - Quatre orbites pour un ensemble-limite.

Il y a donc trois ensembles-limites possibles : $\{-1\}$, $\{+1\}$ et Γ .

Les deux premiers sont des équilibres donc des orbites, mais Γ n'est plus une orbite. Plus précisément, Γ est la réunion de 4 orbites, correspondant à $\theta = 0$, $0 < \theta < \pi$, $\theta = \pi$ et $-\pi < \theta < 0$.

On retiendra qu'un **ensemble-limite peut ne pas être une orbite**.

De la même façon que nous avons défini l'ensemble ω -limite $\omega(x)$, on peut définir par inversion du temps l'**ensemble α -limite** $\alpha(x)$: $\alpha(x) = \bigcap_{t \leq 0} \overline{\{\phi(s, x), s \leq t\}}$

α et ω , première et dernière lettre de l'alphabet grec, sont des symboles classiques du commencement et de la fin. Nous les avons déjà utilisés pour les équilibres en fin du § 3.2.1.

Si l'on appelle $\widetilde{S}$ le **système miroir** de S , c'est-à-dire le système $\dot{x} = -f(x)$, les propriétés de S et de $\widetilde{S}$ s'échangent par inversion du temps. Ainsi :

- les ensembles α -limites de S sont les ensembles ω -limites de $\widetilde{S}$;
- les ensembles ω -limites de S sont les ensembles α -limites de $\widetilde{S}$.

Si $Orb^+(x)$ est borné, $\omega(x) \neq \emptyset$

Supposons que l'orbite de x soit bornée pour $t \geq 0$.

Alors, l'ensemble $\{\phi(n, x) ; n \in \mathbb{N}\}$ est :

- soit fini ; mais dans ce cas, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\phi(m, x)$ soit « répété » une infinité de fois. Alors, $\omega(x)$ contient $\phi(m, x)$.
- soit infini ; comme il appartient à un ensemble compact, il possède un point d'accumulation, qui appartient par définition à $\omega(x)$.

Dans les deux cas, $\omega(x)$ *n'est pas vide*.

Ce résultat vaut pour $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, quelle que soit la dimension n du système.

Remarque

Nous n'excluons pas le cas d'une orbite non bornée pour $t < 0$. C'est le cas par exemple du point 1 pour le système $\dot{x} = -x$ sur $\mathbb{R}$. C'est également le cas s'il y a à un instant déterminé une naissance implosive du type rencontré au paragraphe 1.2.1.

Si $Orb^+(x)$ n'est pas borné, $\omega(x)$ peut être vide, comme l'a déjà montré l'exemple 2 d'ensemble-limite. Mais $\omega(x)$ peut aussi être non-vide, ce qui est le sujet de l'exercice suivant.

Connexité des ensembles limites

Un ensemble-limite peut être :

- connexe : nous en avons déjà vu plusieurs exemples ;
- non-connexe : par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, le système $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ a pour trajectoires des spirales logarithmiques centrifuges de centre 0.

Si on pose $z = \arctan y$, les trajectoires du système ayant pour état $\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$ (avec $z \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$) sont de type spiral, et s'approchent alternativement des droites $z = \frac{\pi}{2}$ et $z = -\frac{\pi}{2}$. L'ensemble limite de tout point non nul est la réunion de ces deux droites, qui n'est pas connexe (figure 7.3).

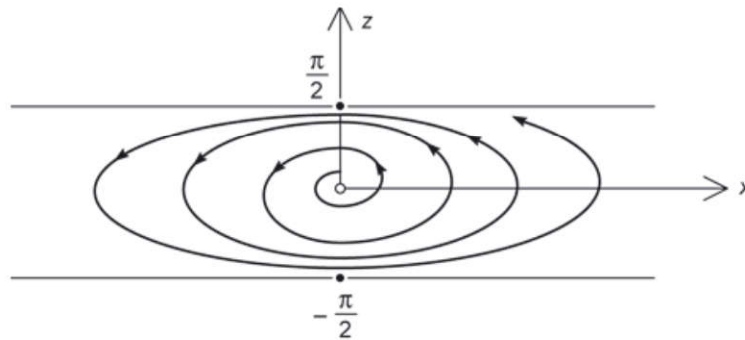


Figure 7.3 - Un ensemble-limite non connexe.

Exercice 7.2 *Orbite non-bornée et ensemble-limite*

Bâtir un exemple (distinct de celui de la figure 7.3) de système dont tous les états x ont :

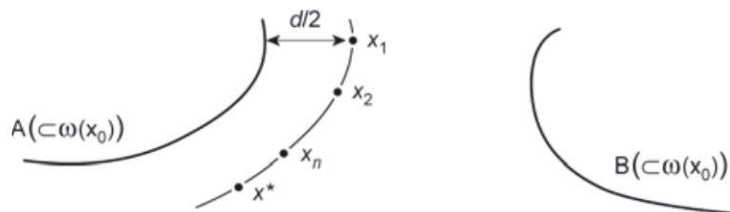
- une orbite à temps positifs $Orb^+(x)$ non-bornée ;
- un ensemble-limite $\omega(x)$ non-vidé.

Il y a toutefois un résultat important si $Orb^+(x_0)$ est borné. Supposons $\omega(x_0)$ réunion de deux fermés disjoints A et B .

Comme $Orb^+(x_0)$ est borné, $\omega(x_0)$ l'est aussi, donc aussi A et B , qui sont par conséquent compacts. Soit d leur distance : $d = \inf_{(y,z) \in A \times B} \|y - z\|$.

La trajectoire $x(t)$ de x_0 approche A à moins de $d/3$, puis B à moins de $d/3$, à nouveau A , ceci une infinité de fois.

Entre deux approches successives de A puis B , la fonction $t \mapsto d[x(t), A]$, prend toutes les valeurs comprises entre $d/3$ et $2d/3$. Étant continue, elle prend à chaque trajet entre A et B au moins une fois la valeur $d/2$.

Figure 7.4 - La suite x_n .

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite des valeurs de x correspondantes. L'ensemble (x_n) , infini et borné, possède un point d'accumulation x^* qui en raison de sa définition appartient à $\omega(x_0)$. Or, ce point est à la distance $d/2$ de A et donc par inégalité triangulaire, à une distance au moins $d/2$ de B . Or, il appartient nécessairement à l'un ou l'autre de ces ensembles, dont la réunion est $\omega(x_0)$. Ceci n'est possible que si $d = 0$.

Mais alors, par compacité de A et B , il existe $y \in A$ et $z \in B$ tels que $d(y, z) = 0$, d'où $y = z$: dès lors, A et B ne sont pas disjoints, ce qui contredit l'hypothèse initiale. Comme $\omega(x_0)$ ne peut pas être réunion de deux fermés disjoints, il est connexe.

En conclusion :

Soit le système $\dot{x} = f(x)$, défini sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, f étant localement lipschitzienne. Soit $x_0 \in \Omega$. Si $\text{Orb}^+(x_0)$ est borné, l'ensemble-limite $\omega(x_0)$ est connexe.

Ensembles-limites sur $\mathbb{R}$

En dimension 1, les ensembles-limites sont faciles à caractériser. Soit en effet le système $\dot{x} = f(x)$, défini sur Ω , domaine (donc intervalle) de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \Omega$. On note $x(t) = \phi(t, x_0)$. D'après le théorème de Cauchy, la fonction $x \mapsto x(t)$ est monotone. Par conséquent :

- si Orb^+ de x_0 n'est pas borné, on a nécessairement $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \pm\infty$, ce qui implique $\omega(x_0) = \emptyset$;
- si Orb^+ de x_0 est borné, il existe une limite $a = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$. Alors, $\omega(x_0) = \{a\}$.

En résumé : en dimension 1, un ensemble-limite ne peut être que *l'ensemble vide* ou un *singleton*.

Les ensembles-limites ne sont pas nécessairement disjoints

Dans l'exemple 4 d'ensemble-limite défini plus haut (figure 7.2) :

- l'ensemble-limite d'un point non nul hors du cercle unité est le cercle unité ;
- l'ensemble-limite du point $+1$ est $\{+1\}$.

Ce deuxième ensemble-limite est inclus strictement dans le premier.

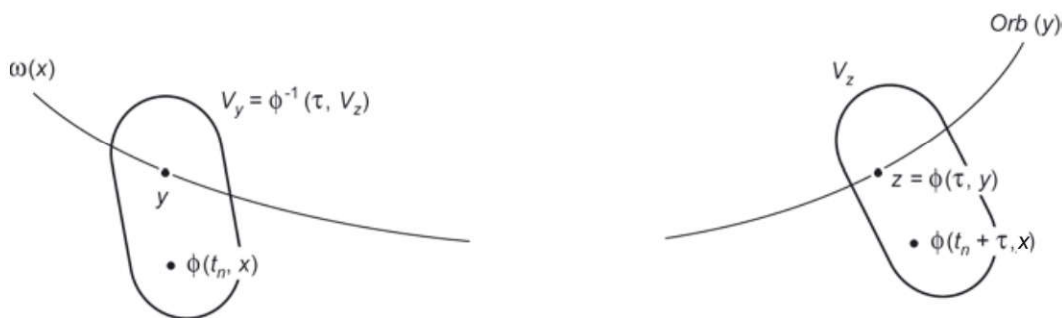
Invariance des ensembles-limites par le flot

Soient $x \in \Omega$, $y \in \omega(x)$ et z appartenant à l'orbite de y , c'est-à-dire : $\exists \tau \in J(y)$ tel que $z = \phi(\tau, y)$. Une fois τ ainsi fixé (notons qu'il n'est pas nécessairement positif), pour tout voisinage V_z de z , $\phi^{-1}(\tau, V_z)$ est un voisinage V_y de y , ceci par continuité de l'application $v \mapsto \phi(\tau, v)$ (continuité du flot, § 2.1.2). Mais, comme $y \in \omega(x)$, il existe une suite croissante de temps $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers l'infini tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\phi(t_n, x) \in V_y$. Il en résulte, d'après la définition de V_y , que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \phi(t_n + \tau, x) \in V_z, \text{ ce qui montre que } z \in \omega(x).$$

Nous venons de montrer que $\left. \begin{array}{l} y \in \omega(x) \\ z \in \text{Orb}(y) \end{array} \right\} \Rightarrow z \in \omega(x)$

En conclusion : *tout ensemble-limite est invariant par le flot.*

Figure 7.5 - $\text{Orb}(y)$ est inclus dans $\omega(x)$.

- L'invariance est bilatérale (concerne le passé et le futur) : si $\omega(x)$ contient un point, il contient aussi la totalité de ses ascendants et de ses descendants.
- Tout ensemble-limite est la réunion des orbites de ses points. Nous avons déjà fait cette constatation sur l'exemple 4 d'ensemble-limite (figure 7.2), que nous avons précisément identifié comme étant la réunion de 4 orbites.

Transitivité des ensembles-limités

Cette propriété se déduit presque immédiatement de la précédente. Soient en effet $y \in \omega(x)$ et $z \in \omega(y)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un temps t'_n tel que $\phi(t'_n, y)$, que nous noterons y_n , appartienne à la boule ouverte $\mathcal{B}(z, 1/n)$.



Figure 7.6 - La transitivité des ensembles-limités.

Comme $y_n \in \text{Orb}(y)$ et que $y \in \omega(x)$, on a $y_n \in \omega(x)$ d'après le paragraphe précédent. Donc, $\mathcal{B}(z, 1/n)$ étant un voisinage de y_n , il existe $t_n > n$ tel que $\phi(t_n, x) \in \mathcal{B}(z, 1/n)$. Comme la suite t_n tend vers $+\infty$, on a $z \in \omega(x)$.

En conclusion, on a la propriété de transitivité :

$$y \in \omega(x) \text{ et } z \in \omega(y) \implies z \in \omega(x).$$

Rassemblons les deux dernières propriétés établies :

Tout ensemble-limite $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ est la réunion des orbites de ses points (invariance)} ; \\ \bullet \text{ contient les ensembles-limités de ses points (transitivité)}. \end{array} \right.$

Notons que la première assertion traduit l'égalité de deux ensembles, alors que la deuxième traduit une inclusion, qui peut être stricte comme l'a déjà montré l'exemple 4 d'ensemble-limite.

Exercice 7.3 Point isolé d'un ensemble-limite

Soit S un système localement lipschitzien dans $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, et $z_0 \in \Omega$.

Montrer que si a est un point isolé de l'ensemble-limite $\omega(z_0)$, alors $\omega(z_0) = \{a\}$.

L'exercice suivant établit un résultat plus général.

Exercice 7.4 Composantes connexes d'un ensemble-limite

Soit S un système localement lipschitzien dans $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, et $z_0 \in \Omega$.

Montrer que si $\omega(z_0)$ possède plusieurs composantes connexes, aucune n'est compacte.

Ce résultat généralise le résultat de l'exercice précédent.

7.2 ORBITES PÉRIODIQUES

7.2.1 Généralités

On appelle **période** de la trajectoire $t \rightarrow x(t)$ définie pour tout t réel, ou indifféremment période de l'orbite correspondante le plus petit T positif tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x(t + T) = x(t)$. On parle alors de trajectoire périodique ou d'**orbite périodique**, notions que nous avons déjà rencontrées sans nous y attarder, par exemple avec l'oscillateur harmonique. Une trajectoire périodique est aussi appelée **cycle**.

Remarques

1. Dans un sens un peu plus large que celui de notre définition, on peut aussi appeler période tout multiple entier positif de T ; dans ce cas, on nomme **période primitive** le réel T défini en début de paragraphe.
2. Notre définition exclut les équilibres, bien que la trajectoire d'un équilibre x_0 satisfasse $\forall t \in \mathbb{R}, \forall T \in \mathbb{R}_+, x(t) = x(t + T) = x_0$: en effet, comme tout T positif convient, leur ensemble n'a pas de plus petit élément. Néanmoins, il peut arriver pour la simplicité de certains énoncés que l'on considère un équilibre comme une orbite de période T .

Stabilité d'une orbite périodique

Une orbite périodique Γ est **stable** si elle est stable en tant qu'ensemble (voir le § 3.3.1), donc si pour tout voisinage V de Γ , il existe un voisinage W de Γ tel que si x appartient à W , ses descendants restent dans V . Notons que W est nécessairement inclus dans V . En écriture abrégée : $x \in W \implies \forall t \geq 0, \phi(t, x) \in V$.

Une orbite qui n'est pas stable est dite (devinez !) **instable**.

- Un exemple de stabilité : pour le système plan décrit par $\begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(1-\rho) \\ 1 \end{pmatrix}$ en coordonnées polaires, le cercle unité Γ déjà donné comme exemple (voir figure 7.1.b) est une orbite périodique stable de période 2π : les trajectoires sont, à l'exception de Γ et de $\{0\}$, des spirales se rapprochant de Γ .
- Un exemple d'instabilité : pour le système plan décrit par $\begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(1-\rho)^2 \\ 1 \end{pmatrix}$, Γ demeure une orbite périodique mais n'est plus stable : les trajectoires intérieures à Γ (sauf $\{0\}$) s'en rapprochent, mais les trajectoires extérieures s'en écartent ($\dot{\rho} > 0$).

a) Attractivité d'une orbite périodique

Une orbite périodique Γ est **attractive** (voir le § 3.3.2) si elle attire un de ses voisinages. Détaillons pour mémoire cette définition : Γ est attractive s'il existe un voisinage W de Γ tel que pour tout x appartenant à W , les descendants de x se rapprochent arbitrairement près de Γ , c'est-à-dire : $\lim_{t \rightarrow \infty} d[\phi(t, x), \Gamma] = 0$.

Cette définition sous-entend l'existence, pour tout $t \geq 0$, de $\phi(t, x)$: il n'y a donc pas de mort explosive, l'état évolue continuellement dans le domaine Ω de définition. Nous rappelons que la distance d'un point y à l'ensemble A est $d(y, A) = \inf_{z \in A} d(y, z)$.

Nous constatons la ressemblance formelle entre les notions d'orbite attractive et d'équilibre attractif.

Le **bassin d'attraction** de l'orbite périodique Γ , noté $Att(\Gamma)$, est l'ensemble des points attirés par Γ , c'est-à-dire : $Att(\Gamma) = \left\{ y \in \Omega ; \lim_{t \rightarrow \infty} d[\phi(t, y), \Gamma] = 0 \right\}$

Les exemples ci-avant amènent ainsi deux remarques :

1. Le cercle unité Γ , orbite périodique du système plan $\begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(1-\rho) \\ 1 \end{pmatrix}$ est **attractif**. Son bassin d'attraction est le plan privé de l'élément $\{0\}$; ce bassin est un voisinage de Γ . Plus généralement, une orbite périodique est attractive si et seulement si elle admet son bassin d'attraction comme voisinage.
2. Pour le système plan $\begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(1-\rho)^2 \\ 1 \end{pmatrix}$, le bassin d'attraction du cercle unité Γ se réduit cette fois au disque unité pointé ($0 < \rho < 1$) ; ce n'est plus un voisinage de Γ . L'orbite périodique Γ n'est donc **pas attractive**. Le fait de posséder un bassin d'attraction de mesure non-nulle n'est donc pas une condition suffisante d'attractivité.

Pour le système $\dot{x} = f(x)$, une orbite périodique **répulsive** et son **bassin de répulsion** sont une orbite attractive et son bassin d'attraction, relativement au système miroir $\dot{x} = -f(x)$. Ces notions s'apparentent aux notions analogues définies pour les équilibres. Le bassin de répulsion de Γ est noté $Rep(\Gamma)$.

Stabilité asymptotique d'une orbite périodique

À l'image de ce que nous avons fait pour les équilibres, nous qualifions d'**asymptotiquement stable** une orbite périodique qui est en même temps stable et attractive. Remarquons qu'aucune des deux qualités n'entraîne l'autre. Toute orbite (en dehors de l'équilibre) de l'oscillateur harmonique est un exemple simple d'orbite périodique stable non attractive. On dispose parallèlement avec le cercle $\theta = 0$ de la figure 7.7 d'un exemple d'orbite à la fois **attractive, répulsive et instable** : l'espace des états est ici le tore T^2 , représenté plongé dans $\mathbb{R}^3$. L'équation d'évolution est
$$\begin{cases} \dot{\theta} = \theta(2\pi - \theta) \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases},$$
 θ (rotation autour de l'axe vertical du tore) et φ étant les angles habituels de paramétrage du tore.

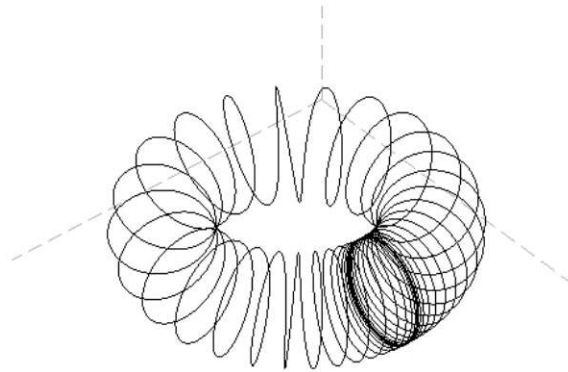


Figure 7.7 – Une orbite attractive, répulsive et instable.

Si l'on réduit à 1 la dimension du système en fixant φ , on obtient qualitativement l'équilibre attractif et répulsif qui fera l'objet du paragraphe 8.2.2 au chapitre 8.

7.2.2 Cycles-limites

On appelle **cycle-limite** ou **cycle ω -limite** une orbite périodique Γ qui est l'ensemble-limite d'au moins un point n'appartenant pas à Γ .

On appelle **cycle α -limite** un cycle ω -limite du système miroir $\dot{x} = -f(x)$.

Exemples et contre-exemples

1. Dans le système plan décrit par $\begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(1-\rho) \\ 1 \end{pmatrix}$ en coordonnées polaires (voir figure 7.1.b, le cercle unité Γ est ensemble-limite de tout point du plan autre que l'origine, qui est un équilibre. Γ est un cycle limite.

2. L'exemple 4 d'ensemble-limite défini par la figure 7.2 est encore le cercle unité : il est ensemble limite de tout point du plan autre que $-1, 0$ ou 1 . Mais, n'étant pas une orbite, ce n'est pas un cycle-limite.
3. Les orbites du système plan $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ sont toutes périodiques. Ce sont des cercles de centre O . Toute orbite Γ est ensemble-limite de tous ses points, mais d'aucun point ne lui appartenant pas. Les orbites ne sont donc pas des cycles limites.

Exercice 7.5 Un cas d'absence de cycles

On montre qu'en dimension 2, tout voisinage d'un équilibre simplement stable isolé contient une infinité de cycles. Le but du présent exercice est de montrer que cette assertion est fausse en dimension au moins égale à 4.

On considère dans $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 4$) le système linéaire S suivant : $\dot{x} = A x$, avec :

$$A = \text{diag}(R, \alpha R, \underbrace{-1, \dots, -1}_{(n-4)\text{ fois}}), \text{ où } \alpha \text{ est un réel positif et } R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que 0 est un équilibre simplement stable isolé.
2. Montrer que pour un choix convenable de α le flot ne présente aucun cycle.

7.3 VARIÉTÉS REMARQUABLES

Équilibres et orbites périodiques sont les éléments de structuration les plus simples d'un portrait de phases, mais ne sont pas les seuls. Nous avons en effet déjà identifié, dans le cas de systèmes *linéaires*, certaines parties remarquables de $\Omega = \mathbb{R}^n$: les sous-espaces stable E_s , central E_c et instable E_u .

Dans le cas d'un équilibre hyperbolique, nous retrouvons les espaces E_s et E_u par le biais des notions d'attractivité et de répulsivité. Soit par exemple l'équilibre hyperbolique 0 d'un système linéaire de dimension 2. Il y a trois cas :

- Si l'indice du système est $(2, 0, 0)$, le bassin d'attraction de 0 est $\mathbb{R}^2$, le bassin de répulsion $\{0\}$;
- Si l'indice du système est $(1, 0, 1)$, le bassin d'attraction de 0 est une droite vectorielle (hyperplan de $\mathbb{R}^2$), son bassin de répulsion une autre droite. Notons que chacune de ces droites est la réunion de trois orbites : deux demi-droites et l'équilibre 0 ;
- Si l'indice du système est $(0, 0, 2)$, le bassin d'attraction de 0 est $\{0\}$, le bassin de répulsion $\mathbb{R}^2$.

Les six bassins ainsi définis sont des sous-espaces vectoriels de dimensions 0 à 2, donc des variétés différentielles de classe C^∞ de $\mathbb{R}^2$. Ces variétés ne sont autres que E_s et E_u si la dimension des bassins est non-nulle.

On peut pressentir que, dans le cas d'un système **non-linéaire** S d'espace d'état Ω de dimension quelconque, ce constat demeurera valide, à condition de remplacer E_s et E_u par des variétés convenablement définies. En effet, au voisinage d'un équilibre hyperbolique de S , le théorème de Hartman-Grobman garantit une conjugaison avec le système linéarisé S_L , et l'homéomorphisme de S_L vers S transforme E_s et E_u , au voisinage de l'équilibre, en parties remarquables de Ω .

On établit effectivement les deux théorèmes énoncés ci-après qui vont plus loin que ce qu'on pouvait déjà espérer de l'utilisation du théorème de Hartman-Grobman :

- d'une part parce que le premier d'entre eux met en jeu des équilibres quelconques, alors que le théorème de Hartman-Grobman implique seulement les équilibres hyperboliques ;
- d'autre part parce qu'ils sont de nature globale, et pas seulement locale.

On trouvera leur démonstration, assez technique, dans des ouvrages plus détaillés.

Les notations sont les mêmes pour les deux théorèmes : a est un équilibre du système $\dot{x} = f(x)$ défini sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, où $f \in C^p(\Omega)$, avec $p \geq 2$. Nous rappelons que si E_s , E_c et E_u sont les sous-espaces stable, central et instable du système linéarisé en a , nous avons $\mathbb{R}^n = E_s \oplus E_c \oplus E_u$.

1^{er} théorème des variétés remarquables (équilibre quelconque)

Il existe dans Ω des variétés dites **variété stable** $V_s(a)$, **centrale** $V_c(a)$ et **instable** $V_u(a)$ de a , dont les sous-espaces affines tangents en a sont respectivement parallèles à E_s , E_c et E_u . Ces variétés sont invariantes par le flot.

Dans le cas où l'équilibre a est hyperbolique, la variété centrale disparaît et on a le résultat :

2^e théorème des variétés remarquables (équilibre hyperbolique)

- $V_s(a)$ et $V_u(a)$ sont respectivement le bassin d'attraction et le bassin de répulsion de a : $V_s(a) = Att(a)$, $V_u(a) = Rep(a)$.
- Le sous-espace affine tangent en a à $V_s(a)$ (resp. $V_u(a)$) est le translaté de E_s (resp. E_u) passant par a .

La deuxième assertion de ce théorème complète les dispositions du 1^{er} théorème.

Remarques

1. On désigne souvent le premier théorème comme théorème de la variété centrale, et le second comme théorème de la variété stable ou de la variété instable.
2. Chacune des variétés V_s et V_u est unique.
On a $\dim V_s(a) = \dim E_s$ et $\dim V_u(a) = \dim E_u$.
3. En revanche, lorsqu'elle existe, la variété centrale n'est pas nécessairement unique : voir l'exemple 5 ci-après. De plus, la propriété d'attractivité ou de répulsion n'est pas utilisable pour définir la variété centrale.
4. La classe de régularité des variétés remarquables dépend de celle du flot. Si $f \in C^p(\Omega)$, $V_s(a)$ et $V_u(a)$ sont de classe C^p et $V_c(a)$ de classe C^{p-1} .
5. L'ensemble des tangentes en a aux orbites (auxquelles on ajoute $\{a\}$) d'une variété remarquable $V(a)$ [$V(a)$ désigne $V_s(a)$ ou $V_c(a)$ ou $V_u(a)$] peut être vide, ou une partie propre non vide de $V(a)$, ou $V(a)$ entière. Cette constatation fait l'objet de l'exercice 7.6.

Exemples

La dimension 2 suffit déjà à illustrer des cas variés.

Dans les exemples suivants, nous avons $\Omega = \mathbb{R}^2$ et nous posons $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

1. Pour le système $\dot{z} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} z$, la variété stable de l'équilibre hyperbolique 0 d'indice $(2, 0, 0)$ est $V_s(0) = \mathbb{R}^2$, la variété instable $V_u(0) = \emptyset$.
Ce constat se généralise à $\mathbb{R}^n$: pour un système linéaire asymptotiquement stable, $V_s(0) = \mathbb{R}^n$.
2. L'équilibre 0 de $\dot{z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} z$, système hyperbolique d'indice $(1, 0, 1)$, est un point-selle (ou col). La variété stable de 0 est $V_s(0) = \{0\} \times \mathbb{R}$. La variété instable de 0 est $V_u(0) = \mathbb{R} \times \{0\}$.

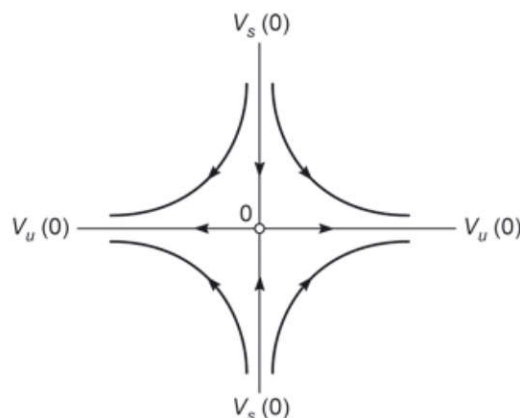


Figure 7.8 – Variétés remarquables d'un système linéaire 2-D.

Si on appelle x et y les composantes de z , on peut représenter par la figure 7.9 suivante quatre trajectoires : deux appartiennent à $V_s(0)$, deux à $V_u(0)$.

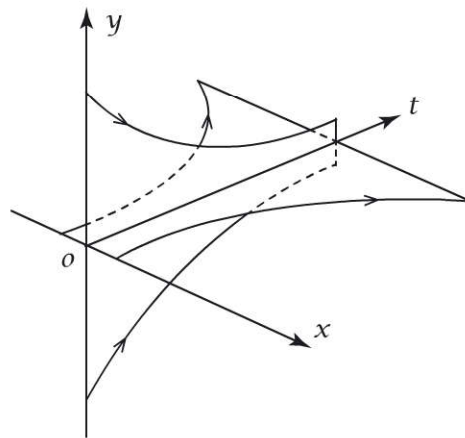


Figure 7.9 - Quatre trajectoires.

3. Pour $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y + 3x^2 \end{pmatrix}$, l'équilibre 0 est hyperbolique, $V_s(0)$ est l'axe des ordonnées, $V_u(0)$ est la parabole $y = x^2$. Ce système fait l'objet du problème 7.1.

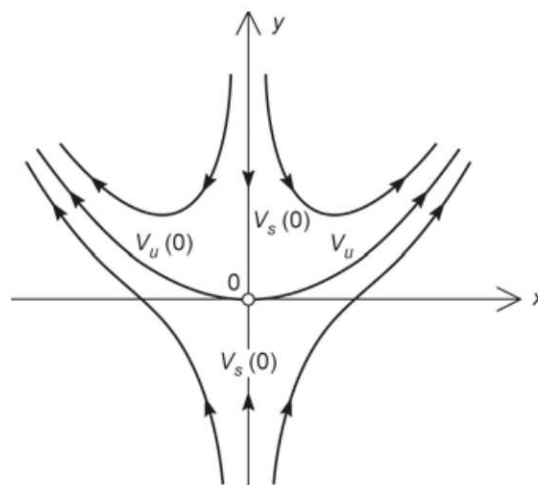


Figure 7.10 - Variétés remarquables d'un système non-linéaire.

4. L'équilibre 0 du système $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 \\ -y \end{pmatrix}$ n'est cette fois-ci plus hyperbolique : le linéarisé en 0 a pour indice $(1, 1, 0)$. La variété stable $V_s(0)$ est l'axe des ordonnées, et la variété centrale $V_c(0)$, unique dans cet exemple, est l'axe des abscisses. Le portrait de phases a qualitativement la même allure que celui de l'exemple 2 (figure 7.8), bien que les orbites ne soient plus des hyperboles et que les solutions explosent (équation $\dot{x} = x^3$).
5. Modifions l'exemple précédent en considérant le système $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ -y \end{pmatrix}$, qui fait l'objet du problème 7.2. Son indice est $(1, 1, 0)$. La variété stable $V_s(0)$ est unique : c'est l'axe des ordonnées. Il y a en revanche une infinité de variétés centrales $V_c(0)$: voir la figure 7.11.

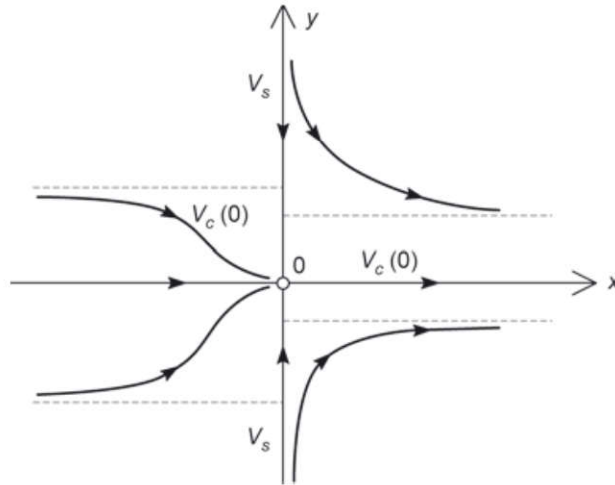


Figure 7.11 - Non-unicité de la variété centrale.

Problème 7.1 Variétés stable et instable

Cet exercice valide l'allure de la figure 7.10, qui est un portrait de phases du système S .

Posant $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, soit S le système $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = f(z) = \begin{pmatrix} x \\ -y + 3x^2 \end{pmatrix}$.

1. (a) Linéariser S autour de son équilibre $z_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On notera S_L le système linéarisé.
 (b) Quelle est la nature de z_0 en tant qu'équilibre de S ? De S_L ?
2. **Variété stable $V_s(z_0)$** : montrer que l'axe des ordonnées $V_1 = \{0\} \times \mathbb{R}$:
 (a) est invariant par le flot.
 (b) est la variété stable $V_s(z_0)$ de z_0 .
 (c) est constitué de 3 orbites.
3. **Variété instable $V_u(z_0)$** : montrer que la parabole V_2 d'équation $y = x^2$:
 (a) est invariante par le flot.
 (b) est la variété instable $V_u(z_0)$ de z_0 .
 (c) est constituée de 3 orbites.

Problème 7.2 Variétés centrales

Cet exercice valide l'allure de la figure 7.11, qui est un portrait de phases du système S .

Posant $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, soit S le système $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = f(z) = \begin{pmatrix} x^2 \\ -y \end{pmatrix}$.

1. (a) Linéariser S autour de son équilibre $z_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On notera S_L le système linéarisé.
 (b) Quelle est la nature de z_0 en tant qu'équilibre de S_L ? De S ?
2. **Résolution analytique de S :**
 (a) Calculer l'expression de $\phi(t, z_1)$, avec $z_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$
 (b) Déterminer la plage temporelle $J(z_1)$ et les éventuels phénomènes de naissance implosive et de mort explosive.
3. **Variétés centrales $V_c(z_0)$:**
 (a) Donner l'équation des orbites, hors celles constituant l'axe des ordonnées.
 (b) Montrer qu'il existe une infinité de variétés centrales.

Exercice 7.6 Tangentes aux orbites d'une variété remarquable

a étant un équilibre d'un système S de classe C^2 , montrer par des exemples que la réunion des tangentes en a à toutes les orbites (à chacune desquelles on ajoute $\{a\}$) d'une variété remarquable $V(a)$ peut être :

1. soit vide ;
2. soit une partie propre non vide du sous-espace affine évoqué dans le 2^e théorème des variétés remarquables ;
3. soit le sous-espace affine évoqué dans le 2^e théorème des variétés remarquables.

7.3.1 Éléments homoclines et hétéroclines

Un point $y \in \Omega$ est un point **homocline** s'il existe un équilibre hyperbolique a tel que y appartienne à la variété stable *et* à la variété instable de a , c'est-à-dire $y \in V_s(a) \cap V_u(a)$.

$y \in \Omega$ est dit **hétérocline** s'il existe deux équilibres hyperboliques distincts a et b tels que y appartienne à la variété stable de a et à la variété instable de b , c'est-à-dire $y \in V_s(a) \cap V_u(b)$.

Les qualificatifs homocline et hétérocline s'appliquent aussi à la trajectoire et à l'orbite portant y . On trouvera des exemples dans les corrigés des questions 8 et 14 du thème d'étude sur le pendule, qui clôt le chapitre 8.

Comme nous l'avons signalé dès le premier chapitre, l'espace Ω d'appartenance de l'état x est généralement un **domaine** (ouvert connexe) Ω de $\mathbb{R}^n$, parfois étendu à son **adhérence**, c'est-à-dire au plus petit fermé qui le contient. Mais on peut aussi rencontrer comme ensemble naturel d'appartenance de l'état une **variété** de dimension n qui n'est pas une partie de $\mathbb{R}^n$ (voir l'annexe 2). Dans ce qui suit, il suffit de s'appuyer sur la définition intuitive de variété de dimension n , ensemble d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ se recouvrant partiellement et convenablement recollés. Ainsi :

- le cercle, variété de dimension 1, s'obtient en recollant deux intervalles réels ouverts ;
- la sphère, variété de dimension 2, s'obtient en recollant deux disques plans ouverts.

Le but des exemples donnés dans ce bref chapitre est de montrer que certaines propriétés peuvent être vérifiées sur une variété et fausses dans tout domaine de $\mathbb{R}^n$ de même dimension. L'exercice 1.4 au premier chapitre nous avait déjà fourni un exemple élémentaire.

8.1 DÉRIVATION HORS DE $\mathbb{R}^n$

Quand Ω n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^n$, donc quand x n'est pas un vecteur, qu'est-ce que la dérivée $\dot{x}$? La question se pose effectivement car la définition de la dérivée présuppose celle de la soustraction ; et dans le cas du tore par exemple, on ne sait pas soustraire un élément à un autre. La bonne modélisation mathématique est celle des **variétés différentielles**, qui conduit à définir $\dot{x}$ dans $\mathbb{R}^n$. Il n'est cependant pas indispensable de posséder tout l'arsenal mathématique correspondant. Un lycéen perçoit déjà intuitivement la différence de nature entre angle (réel modulo 2π) et vitesse angulaire (réel). Il pratique donc sans la formaliser la dérivation sur une variété différentielle. Cette opération est évoquée brièvement en annexe 2, paragraphe « variétés ».

On retiendra que :

- si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\dot{x}$ et x appartiennent tous deux à $\mathbb{R}^n$;
- si Ω est un ouvert d'une variété différentielle autre que $\mathbb{R}^n$, alors **x et $\dot{x}$ n'appartiennent pas au même espace** : le premier est dans une variété, le second dans $\mathbb{R}^n$.

8.2 FLOT SUR UN CERCLE

D'un point de vue topologique, le cercle est la sphère S^1 de dimension 1, qu'on peut définir indifféremment comme l'espace $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ des réels modulo 1, ou comme l'ensemble des points du plan euclidien situés à la distance 1 de l'origine (0, 0).

S^1 est aussi le tore T^1 unidimensionnel.

8.2.1 Quelques différences avec un flot sur $\mathbb{R}$

- *Localement*, S^1 et $\mathbb{R}$ sont topologiquement identiques : les propriétés topologiques locales des flots sur ces deux espaces seront donc les mêmes.
- *Globalement* aussi, les flots sur S^1 et sur $\mathbb{R}$ peuvent partager certaines propriétés communes, par exemple la possibilité de ne présenter aucun équilibre.

Mais ils diffèrent sur deux points au moins :

- Une trajectoire non réduite à un équilibre peut être périodique sur S^1 , mais en aucun cas sur $\mathbb{R}$.
- Un équilibre peut être attractif, répulsif et instable en même temps sur S^1 (le paragraphe qui suit en présente un exemple), mais cette situation est impossible sur $\mathbb{R}$.

8.2.2 Un équilibre attractif et répulsif en dimension 1

La position d'un pendule simple est $\theta \in]-\pi, +\pi]$. On identifie les deux bornes $-\pi$ et $+\pi$, ce qui donne à l'ensemble de définition de θ la topologie d'un cercle. Astreignons le pendule aux orbites « vitesse nulle au point haut » et à la condition $\dot{\theta} \geq 0$. Il y a **deux** telles orbites :

- l'ensemble $] -\pi, +\pi[$;
- le point d'équilibre haut ($\theta = \pi$).

L'énergie mécanique étant constante, toute valeur de θ détermine l'énergie potentielle du pendule, donc également son énergie cinétique. Elle détermine enfin $\dot{\theta}$ puisque $\dot{\theta} \geq 0$.

Il existe donc une fonction f (dont on pourra à titre d'exercice trouver la forme analytique) telle que $\dot{\theta} = f(\theta)$. Le système S formé par le pendule contraint comme indiqué est de dimension 1 : l'angle θ en constitue l'état. L'espace des états est $\Omega = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Topologiquement c'est un cercle, variété de dimension 1.

On peut représenter ainsi une trajectoire :
 Le cercle figure l'ensemble Ω , qui est aussi celui des positions de la masse du pendule. Mais le plan sous-jacent n'a pas de signification en termes de système.
 Le point d'équilibre haut, qui constitue en lui-même une orbite, peut être qualifié de semi-stable.



Figure 8.1

L'équilibre est *attractif*, *répulsif* et *instable*.

Dans ce système θ et $\dot{\theta}$ n'appartiennent pas au même ensemble : $\theta \in \Omega$, $\dot{\theta} \in \mathbb{R}$. Cet exemple sert de support à la question 9 du thème d'étude « le pendule », en fin de chapitre. On peut aussi le considérer comme une variante « dégénérée » du système décrit par la figure 7.7, si l'on fixe φ . On peut enfin le rapprocher de l'exemple d'un système réduit à une trajectoire homocline et à l'équilibre correspondant.

8.3 FLOT SUR LA SPHÈRE S^2

8.3.1 Nécessité d'un équilibre sur S^2

Dans tout domaine plan, on peut définir des flots de classe C^1 *sans équilibre*, par exemple le flot constant $f(x) = u \in \mathbb{R}^{2*}$. Mais cette situation pourtant très simple devient impossible sur la sphère.

schéma de démonstration : considérons la sphère unité S^2 de $\mathbb{R}^3$, d'équation $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. Ses points $x_3 = 1$ et $x_3 = -1$ sont appelés respectivement N (comme Nord) et S (comme Sud).

Hypothèse : il existe sur la sphère S^2 un champ de vecteurs qui ne s'annule pas : on peut le représenter comme un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définis sur S^2 et tangents à cette dernière. Sur le petit cercle $x_3 = a$ de S^2 proche de N , baptisé C , le champ a une valeur aussi proche de sa valeur $u(N)$ en N qu'on le désire, moyennant le choix d'un a suffisamment proche de 1. En chaque point x de C , le plan tangent à S^2 en x possède un repère orthogonal (i, j) tel que i est tangent à C et j orienté vers N . Observons le lieu géométrique Γ des positions de $u(x)$ dans notre repère lorsque x parcourt C dans le sens *direct* vu de l'extérieur de S^2 (donc « de dessus ») ; $u(x)$ étant très voisin de $u(N)$, ce lieu est *proche d'un cercle* de rayon $\|u(N)\|$, parcouru dans le sens *néгатif*.

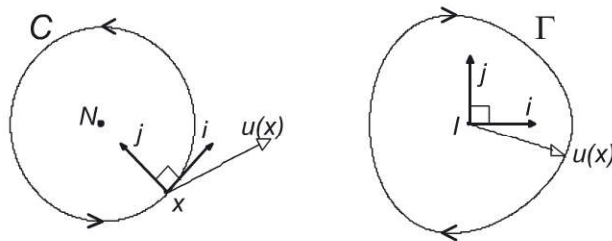


Figure 8.2 - Au pôle Nord.

Figure de gauche : x décrit le petit cercle C dans le sens positif.

Figure de droite : dans le repère (i, j) d'origine I , le vecteur $u(x)$ décrit dans le sens négatif la courbe Γ , qui est proche d'un cercle de centre I .

Suivons notre cercle C lorsqu'on donne à a des valeurs plus faibles. Pour $a = 0$, C est le cercle unité du plan $x_3 = 0$. Diminuons encore a jusqu'à une valeur approchant -1 par excès : C se trouve alors à proximité de S (figure 8.3). Observons encore le lieu géométrique Γ des positions de $u(x)$ dans notre repère (i, j) . Toujours vu de l'extérieur de la sphère (désormais donc « de dessous »), x parcourt maintenant C dans le sens **négatif** et $u(x)$ parcourt un lieu Γ **proche d'un cercle** de rayon $\|u(S)\|$, dans le sens **direct**.

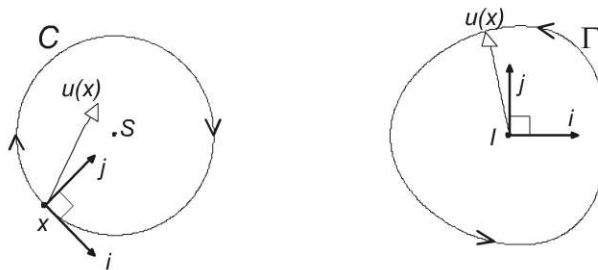


Figure 8.3 - Au pôle Sud.

Figure de gauche : x décrit le petit cercle C dans le sens négatif.

Figure de droite : dans le repère (i, j) d'origine I , le vecteur $u(x)$ décrit dans le sens positif la courbe Γ , qui est proche d'un cercle de centre I .

En conclusion, lorsque x parcourt C , le nombre de tours effectués par le vecteur $u(x)$ autour de l'origine I du repère (i, j) évolue de -1 (pour a proche de 1) à $+1$ (pour a proche de -1). Comme Γ se déforme continûment lorsque a varie, ceci n'est possible que si pour au moins une valeur de a , Γ vient « toucher » l'origine I du repère (i, j) . Mais cela signifie qu'il existe x tel que $u(x) = 0$, ce qui est contraire à notre hypothèse. Il faut donc rejeter cette dernière, ce qui conduit au « théorème de la sphère chevelue ». Cette image est inspirée par l'analogie entre un vecteur de S^2 et un cheveu tangent au cuir chevelu... le résultat n'autorise donc aucun épi !

Théorème de la sphère chevelue

Tout système dynamique continu sur la sphère S^2 y possède au moins un équilibre.

Remarques

1. Le théorème est énoncé dans le vocabulaire des systèmes. Il équivaut à l'énoncé « tout champ de vecteurs continu sur la sphère S^2 s'y annule en un point au moins. »
2. Le nombre d'équilibres peut être exactement 1, comme l'illustre la figure 8.4.

8.3.2 Un équilibre attractif et répulsif en dimension 2

Sur la sphère Ω de $\mathbb{R}^3$, définissons ainsi le système S de dimension 2 :

- les trajectoires sont :
 - tous les cercles de Ω tangents en A au grand cercle (C) , mais privés du point A ;
 - le point A , unique équilibre du système.
- en $x \in \Omega$, la trajectoire est décrite à la vitesse linéaire $d(x, A)$, d désignant la distance dans $\mathbb{R}^3$;
- le sens de parcours des trajectoires est celui représenté sur la figure 8.4.

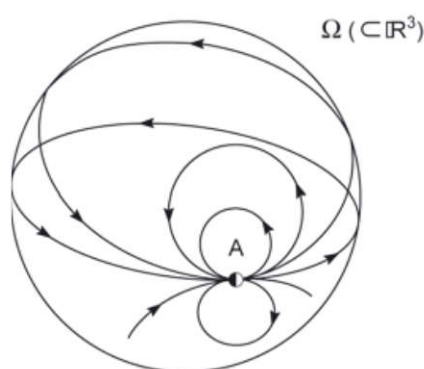


Figure 8.4 – Un équilibre attractif instable sur S^2 .

Qualitativement, la discussion est de même type que pour le premier exemple, à ceci près que l'espace d'états est ici une sphère et qu'il existe une infinité d'orbites distinctes. A est un équilibre *attractif, répulsif et instable*.

8.4 FLOT SUR LA SPHÈRE S^n **8.4.1 n pair**

Au terme d'une démonstration assez technique que nous ne reproduirons pas, le théorème de la sphère chevelue se généralise à tout n pair.

Pour n pair, tout système dynamique continu sur la sphère S^n y possède au moins un équilibre.

8.4.2 n impair

Pour n impair, nous savons déjà que le théorème de la sphère chevelue ne s'applique pas. En effet, pour $n = 1$, S^1 n'est autre qu'un cercle et nous disposons de l'exemple trivial d'une rotation uniforme de l'état x , flot évidemment dépourvu d'équilibre.

Plongé dans $\mathbb{R}^2$ euclidien, S^1 est l'ensemble des points $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1^2 + x_2^2 = 1$. On peut illustrer un flot constant (une « vitesse angulaire » v constante) sur S^1 par le champ $(x_1, x_2) \in S^1 \mapsto (-v \cdot x_2, v \cdot x_1)$, vecteur de $\mathbb{R}^2$ orthogonal à S^1 en x .

Ce détour artificiel par $\mathbb{R}^2$ ne doit pas nous faire oublier qu'en tout point de S^1 , $\dot{x}$ est un élément de $\mathbb{R}$ (en l'occurrence $v \in \mathbb{R}$) et non de $\mathbb{R}^2$.

Dès lors, une généralisation est possible sur l'idée suivante : S^{2n-1} est l'ensemble des $x = (x_1, x_2, \dots, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$ de norme euclidienne 1.

Il suffit de remarquer que $f(x) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \dots, -x_{2n}, x_{2n-1})$ est orthogonal à x et se situe donc dans un espace vectoriel de dimension $(2n - 1)$ tangent à S^{2n-1} en x . Cet espace $\mathbb{R}^{2n-1}$ figure l'ensemble des valeurs possibles de $\dot{x}$. Le flot ainsi défini ne s'annule jamais car $\forall x \in S^{2n-1}$, $\|f(x)\| = 1$. En résumé :

Flot sur S^{2n-1}

Sur toute sphère S^{2n-1} de dimension impaire, il existe un flot n'admettant aucun équilibre.

Si ce résultat était faux, il serait impossible de faire tourner une roue à vitesse constante... et le marché des régulateurs de vitesse s'effondrerait !

Voici enfin un exercice dans lequel Ω est une partie propre de la sphère S^2 . Il évoque les notions de naissance explosive et de mort implosive, définies au paragraphe 1.2.1. Ces deux notions s'échangent par inversion du temps.

Exercice 8.1 Naissance explosive, mort implosive

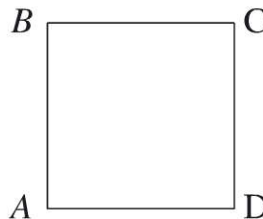
Sur Ω , sphère euclidienne de rayon 1 privée de ses pôles nord et sud, un point est repéré par sa longitude $\lambda \in]-\pi, +\pi]$ et sa latitude $\varphi \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$.

Posant $z = \begin{pmatrix} \lambda \\ \varphi \end{pmatrix}$, on définit sur Ω le système $\dot{z} = \begin{pmatrix} \dot{\lambda} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ \frac{4}{\pi^2 - 4\varphi^2} \end{pmatrix}$, d'état initial $z_0 = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ 0 \end{pmatrix}$

1. À quelle surface classique Ω est-il homéomorphe ?
2. Quel est l'ensemble $\mathcal{E}$ des équilibres du système ?
3. Quelle est l'orbite de z_0 ?
4. Montrer que pour la trajectoire d'état initial z_0 on peut qualifier la naissance d'explosive et la mort d'implosive.

8.5 FLOT SUR LE TORE

Considérons un carré fermé $ABCD$



Identifions isométriquement les segments AD et BC (A étant identifié à B , et D à C). On obtient ainsi une variété de dimension 2 homéomorphe à une section de cylindre circulaire. Ce cylindre comprend deux « bords » AB et DC tous deux circulaires en raison des identifications opérées. Si on referme le cylindre sur lui-même en identifiant point par point et isométriquement les segments AB et DC (qui compte tenu de la première identification sont des cercles) comme le montre la figure 8.5, on obtient une variété T de dimension 2 homéomorphe à un tore.

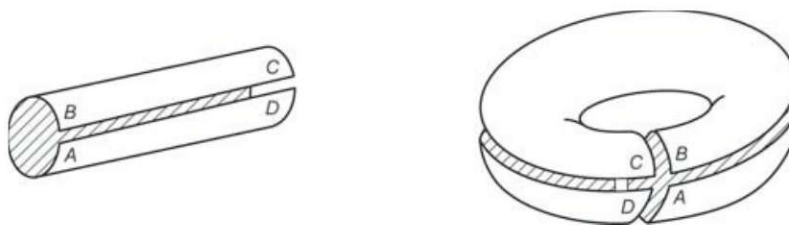


Figure 8.5 – Du carré au tore.

Observations

1) Cette description fait appel intuitivement à un plongement dans $\mathbb{R}^3$ euclidien, espace dans lequel le tore a de multiples représentants : pneu d'automobile, bouée de sauvetage, etc. Mais ce plongement n'est pas indispensable. Les identifications

opérées permettent bien de définir une variété de dimension 2, qui est localement homéomorphe à une portion du plan $\mathbb{R}^2$. Ainsi, pour construire topologiquement un tore, il faut déjà connaître $\mathbb{R}^2$ mais il n'est pas nécessaire de connaître $\mathbb{R}^3$.

2) On trouvera une définition plus formelle du tore en tant que variété dans l'exercice 13.2 (annexe 2, paragraphe « variétés »).

La construction du tore faite ci-dessus ainsi que celle, plus formelle, de l'exercice 13.2 équivalent à la suivante : identifions AD et AB respectivement aux vecteurs $(1, 0)$ et $(0, 1)$ du plan vectoriel $\mathbb{R}^2$ qui supporte le carré. Dans le plan, définissons la relation d'équivalence $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \in \mathbb{Z}^2$. On définit le tore comme ensemble quotient de $\mathbb{R}^2$ par $\sim$. Cette définition à peine plus abstraite que la précédente, mais équivalente, permet de munir le tore de la topologie quotient de celle de $\mathbb{R}^2$ par la relation d'équivalence $\sim$. C'est la même topologie que celle déduite de la première définition.

Un flot sur $\mathbb{R}^2$ de périodes $(1, 0)$ et $(0, 1)$, c'est-à-dire tel que pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$, on ait $f(x + p, y + q) = f(x, y)$ induit un flot sur T . Considérons le système défini sur $\Omega = \mathbb{R}^2$ par $\dot{z} = a$, où a est un vecteur constant donné de $\mathbb{R}^2$. Les trajectoires sont dans $\mathbb{R}^2$ des droites parcourues à la vitesse constante a . Sur T , ce sont des hélices qui s'enroulent autour du tore. Si $a = (0, c)$ ou $a = (c, 0)$, toute trajectoire sur T est un « cercle décrit à vitesse constante », de période $1/c$, sauf bien sûr dans le cas où $c = 0$, qui correspond à un équilibre. Sinon, $a = (\alpha, \beta)$ avec α et β non tous nuls, par exemple $\beta \neq 0$ (même approche si $\alpha \neq 0$). Il y a alors 2 cas :

- Premier cas : $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$; alors, toute trajectoire est périodique ;
- Deuxième cas : $\frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{Q}$; alors, toute trajectoire s'enroule indéfiniment autour du tore et l'orbite correspondante y est *partout dense*.

La validation de ces deux cas ne présente guère de difficulté. Elle est très liée aux deux exercices suivants.

Exercice 8.2 Pour $\alpha \notin \mathbb{Q}$, la distance de $\alpha\mathbb{Z}^*$ à $\mathbb{Z}$ est nulle

On montre dans cet exercice que tout irrationnel possède des multiples entiers non nuls approchant un entier arbitrairement près.

Soit α un réel irrationnel, $\delta = d(\alpha, \mathbb{Z})$ sa distance à $\mathbb{Z}$. On a donc $\alpha = m \pm \delta$, avec $m \in \mathbb{Z}$. On suppose que $\alpha = m + \delta$ (le cas $\alpha = m - \delta$ se traitant de façon analogue).

1. Soit Δ la partie entière de $1/\delta$. Montrer que la distance à $\mathbb{Z}$ de l'un des deux nombres $\Delta \cdot \alpha$ et $(\Delta + 1) \cdot \alpha$ est inférieure ou égale à $\delta/2$.
2. En déduire que la distance entre $\alpha\mathbb{Z}^*$ et $\mathbb{Z}$ est nulle.

Problème 8.1 Flot hélicoïdal sur le tore

Dans cet exercice, on adopte les notations du § 8.5 concernant un flot sur le tore.

Un flot sur T est induit par le flot plan $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$. Ceci est légitime car ce flot plan, constant, est donc en particulier périodique de périodes $(0, 1)$ et $(1, 0)$, condition requise pour la définition d'un flot sur T . Le but de l'exercice est de classer les divers types de trajectoires obtenus selon les valeurs de b et c , dans les quatre cas suivants :

1. $b = c = 0$. Vérifier que tout point de T est un équilibre.
2. $b = 0, c \neq 0$ ou $b \neq 0, c = 0$. Montrer que toute trajectoire est un cycle.
3. $b \neq 0, \frac{c}{b} \in \mathbb{Q}^*$. Montrer que toute trajectoire est un cycle.
4. $b \neq 0, \frac{c}{b} \notin \mathbb{Q}$. Montrer que toute orbite est *partout dense sur T* .

8.6 THÈME D'ÉTUDE : LE PENDULE

Le but de cette étude, présentée sous forme d'un problème, est d'illustrer plusieurs notions fondamentales concernant les systèmes non-linéaires par l'exemple concret du pendule pesant, amorti ou non.

Que le lecteur habitué au confort de $\mathbb{R}^n$ se rassure : le pendule sera modélisé dans $\mathbb{R}^2$. Seule la question 9 sera l'occasion d'une rapide excursion hors de $\mathbb{R}^n$, ce qui suffit cependant à rattacher ce thème au présent chapitre.

8.6.1 Le pendule : énoncé

On considère un pendule constitué d'une masse ponctuelle située à l'extrémité d'une tige rigide sans masse. Sa position est repérée par l'angle θ que la tige fait avec la verticale descendante (voir figure). On choisit $\theta \in \mathbb{R}$, ce qui permet de tenir compte du nombre de tours faits par le pendule autour de l'axe. Nous avons établi au § 1.2.3 qu'avec des unités convenables, θ satisfait l'équation différentielle d'ordre 2 : $\ddot{\theta} + \sin \theta = 0$ (cas du pendule non amorti) ou l'équation :

$\ddot{\theta} + \gamma \dot{\theta} + \sin \theta = 0$ (cas du pendule amorti, $\gamma > 0$ étant l'amortissement).

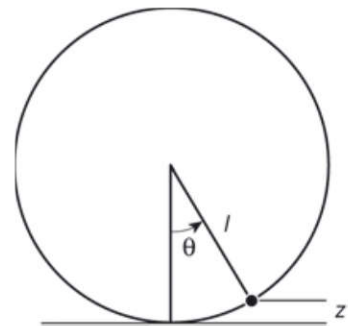


Figure 8.6 - Le pendule.

1. On considère le pendule amorti ou non ($\gamma \geq 0$). Mettre l'équation du système sous la forme $\dot{x} = f(x)$, avec $x \in \mathbb{R}^2$. On notera $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$ le vecteur d'état, et S le système.
2. Déterminer les équilibres du système.

Dans la suite, on posera $F(x) = x_2^2 - 2 \cos x_1 + 2$. Dans le système adimensionnel choisi, $F(x)$ représente le double de l'énergie totale (somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle), posée nulle à l'équilibre bas.

3. On se place (questions 3 à 9) dans le cas du **pendule non amorti** ($\gamma = 0$).
 - (a) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}^2, \dot{F}(x) = 0$.
 - (b) Dédire de l'équation vérifiée par toute orbite qu'il existe quatre types d'orbites (équilibres inclus).
4. Linéariser S autour des équilibres bas $e_0 = (0, 0)$ et haut $e_1 = (\pi, 0)$.
On discutera la nature des équilibres des systèmes linéarisés respectifs S_0 et S_1 , et des éventuelles implications sur les équilibres e_0 et e_1 de S .
5. Vérifier que pour $(q, p) = (x_1, x_2)$ et $V(q) = -\cos q + 1$, l'hamiltonien $H(p, q) = \frac{\|p\|^2}{2} + V(q)$ est l'énergie totale $F(x)/2$.
Montrer que V est strictement minimum (localement) pour $q = 0$.
Qu'en déduit-on quant à l'équilibre e_0 de S ? (voir l'exercice 6.1)
6. Tracer un portrait de phases du système S .
7. Identifier les variétés remarquables en e_0 et en e_1 .
8. Identifier les éventuelles orbites homoclines et hétéroclines.
9. On choisit, pour cette question seulement : $x_1 = \theta \in \mathbb{R}/2\pi$ (on ne « compte pas » les tours). Que peut-on dire du sous-système S_0 réduit à $E = 4$ avec la contrainte $\dot{x}_2 \geq 0$?
10. On se place désormais dans le cas du **pendule amorti** ($\gamma > 0$).
 - linéariser le système, désigné par Σ , autour de son équilibre haut $e_1 = (\pi, 0)$.
 - déterminer la nature de l'équilibre du système linéarisé Σ_1 .
 - que peut-on en déduire quant à l'équilibre e_1 de Σ ?
11. Montrer que la fonction $F(x)$ (introduite dans l'énoncé avant la question 3) est une fonction de Liapounov au voisinage de e_0 . En déduire la nature de l'équilibre e_0 de Σ .

12. Le but de cette question est d'affiner le résultat acquis en question précédente.
- linéariser Σ autour de l'équilibre bas $e_0 = (0, 0)$.
 - déterminer en fonction de γ ($\gamma > 0$) la nature de l'équilibre du système linéarisé Σ_0 .
 - que peut-on en déduire quant à l'équilibre e_0 de Σ ?
13. Esquisser le portrait de phases de Σ pour $\gamma < 2$, puis pour $\gamma > 2$.
14. Identifier les variétés remarquables en e_0 et en e_1 .

8.6.2 Le pendule : corrigé

1. Posant $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, l'équation initiale du second ordre en θ équivaut à

l'équation du premier ordre en x : $\dot{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\sin x_1 - \gamma x_2 \end{pmatrix}$

On note que le système est de classe C^∞ .

2. $\dot{x}_1 = 0 \iff x_2 = 0$
 $\dot{x}_2 = 0 \iff \sin x_1 + \gamma x_2 = 0$, soit (comme $x_2 = 0$) $x_1 = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
 Par conséquent, pour $\gamma \geq 0$, (pendule amorti ou non), les équilibres sont donnés

par : $\begin{cases} x_1 = \theta = k\pi \\ x_2 = 0 \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{Z}$: $\begin{cases} k \text{ impair} : \text{équilibre haut} \\ k \text{ pair} : \text{équilibre bas} \end{cases}$

3. (a) On a $\nabla F(x) = \begin{pmatrix} 2 \sin x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$, d'où $\dot{F} = \nabla F \cdot f = \begin{pmatrix} 2 \sin x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ -\sin x_1 \end{pmatrix} = 0$.

On a donc $\dot{F} = 0$: F est **constante sur toute trajectoire**.

- (b) F étant constante sur toute trajectoire, on a $F(x) = E$ (E étant une constante) sur toute orbite. Attention ! à une valeur de E peuvent correspondre plusieurs orbites.

$E = 0$: ceci implique $x = \begin{pmatrix} 2k\pi \\ 0 \end{pmatrix}$: x est un **équilibre stable** (équilibre bas) du système.

$0 < E < 4$: alors, $x_2^2 = 2 \cos x_1 - 2 + E = 2(\cos x_1 - 1) + E$, c'est-à-dire $x_2^2 + 4 \sin^2 \frac{x_1}{2} = E$, ce qui fournit des **orbites périodiques** homologues par translations de vecteurs $\begin{pmatrix} 2k\pi \\ 0 \end{pmatrix}$ (avec $k \in \mathbb{Z}$).

Pour E proche de 0 (petites oscillations), on a $\sin \frac{x_1}{2} \simeq \frac{x_1}{2}$, et les orbites seront proches des cercles $x_1^2 + x_2^2 = E$.

Remarque

Toute iso- E est constituée d'une infinité d'orbites.

$E = 4$: alors, on a sur toute orbite $F(x) = x_2^2 - 2 \cos x_1 + 2 = 4$:

$x_2^2 = 2(\cos x_1 + 1) = 4 \cos^2 \frac{x_1}{2}$: $x_2 = \pm 2 \cos \frac{x_1}{2}$: les orbites sont des arcs de sinusoïde, correspondant à l'**arrivée à vitesse nulle** « par la droite » (signe +) ou « par la gauche » (signe -) à l'**équilibre haut**. Comme le système est de classe C^∞ , donc localement lipschitzien, le théorème de Cauchy interdit que cette arrivée se fasse en un temps fini.

Si on modifie la définition de l'état en prenant $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et en imposant $\dot{\theta} \geq 0$, la dimension du système se réduit à 1. Il n'y a que deux trajectoires dont l'équilibre haut, qui est alors à la fois **attractif, répulsif et instable** : on retrouve, moyennant la condition $\dot{\theta} > 0$, l'exemple décrit au paragraphe 8.2.2.

$E > 4$: sur toute orbite, on a alors :

$$x_2^2 = 2(\cos x_1 - 1) + E = -4 \sin^2 \frac{x_1}{2} + E.$$

Comme $E > 4$, x_2 ne s'annule jamais et garde un signe constant. Ceci signifie que le pendule n'oscille pas : son énergie cinétique est suffisante pour qu'il **tourne continuellement** dans le même sens, positif ou négatif. Ces deux cas correspondent respectivement aux équations

$$x_2 = \sqrt{E - 4 \sin^2 \frac{x_1}{2}}$$

$$\text{et } x_2 = -\sqrt{E - 4 \sin^2 \frac{x_1}{2}} \text{ des orbites.}$$

En résumé, on a bien quatre types d'orbites : équilibre stable, équilibre instable, orbite périodique, orbite apériodique.

4. On a $\nabla f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x_1 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui fournit les deux systèmes linéarisés :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x \quad (S_0) \quad \text{et} \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x \quad (S_1).$$

- Pour S_0 , les valeurs propres sont $\pm i$: le système a pour indice $(0, 2, 0)$ et n'est donc pas hyperbolique. L'équilibre de S_0 est **simplement stable**.

On **ne peut pas** conclure au vu de ce seul élément quant à la stabilité de l'équilibre e_0 de S .

- Pour S_1 , les valeurs propres sont ± 1 : le système a pour indice $(1, 0, 1)$ et est donc hyperbolique. E_s est engendré par le vecteur $(1, -1)$ et E_u par $(1, 1)$. L'équilibre de S_1 est **instable** (de nature col : les trajectoires sont des arcs d'hyperboles). L'équilibre e_1 de S est lui-même **instable**.

5. On a $H(p, q) = \frac{\|p\|^2}{2} + V(q) = \frac{x_2^2}{2} - \cos x_1 + 1$, expression dans laquelle on reconnaît l'énergie mécanique du système. On en déduit (résultat établi en exercice 6.1) que e_0 est un **équilibre simplement stable** de S .
6. Portrait de phases du pendule non amorti :

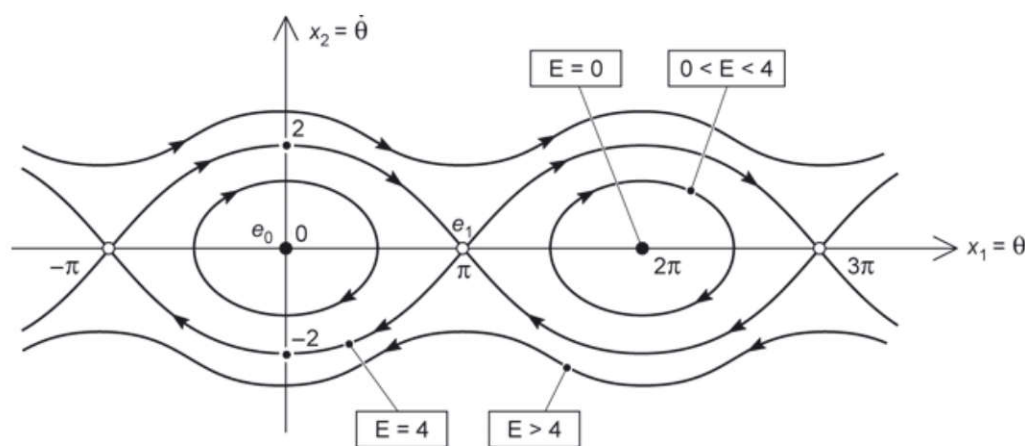


Figure 8.7 - Cas du pendule non amorti.

7. En e_0 : l'indice du système linéarisé est $(0, 2, 0)$.

La « lentille » ouverte $V_c(0) = \{(x_1, x_2) ; |x_1| < \pi \text{ et } |x_2| < 2 \cos \frac{x_1}{2}\}$ est invariante par le flot et tangente en 0 à $E_c = \mathbb{R}^2$. Elle répond à la définition d'une **variété centrale** $V_c(e_0)$.

Comme $E_s = E_u = \phi$, les variétés stable et instable se réduisent à $\{e_0\}$.

En e_1 : l'indice du système linéarisé est $(1, 0, 1)$. L'examen du portrait de phases montre que :

- $V_s(e_1)$ est l'arc de sinussoïde $x_2 = 2 \cos \frac{x_1}{2}$, avec $-\pi < x_1 < 3\pi$
- $V_u(e_1)$ est l'arc de sinussoïde $x_2 = -2 \cos \frac{x_1}{2}$, avec $-\pi < x_1 < 3\pi$.

8. Les orbites **hétéroclines** sont celles correspondant à $E = 4$: une orbite hétérocline est un arc de sinussoïde joignant l'équilibre instable $(k\pi, 0)$ (k impair) à l'un des deux équilibres instables $(k\pi \pm 2\pi, 0)$. Il n'y a pas d'orbite homocline.

Remarque

Si on adopte $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ comme espace d'appartenance de x_1 , les trois équilibres $(k\pi, 0)$ et $(k\pi \pm 2\pi, 0)$ deviennent un équilibre unique, et les orbites hétéroclines précédemment identifiées deviennent **homoclines**. Il n'y a alors plus d'orbite hétérocline.

9. S_0 est bien un sous-système, illustré en figure 8.7 par l'arc de sinussoïde $x_1 \mapsto x_2 = 2 \cos \frac{x_1}{2}$, où $x_1 \in [-\pi, \pi]$, les extrémités de ce segment étant identifiées l'une à l'autre. Il comporte deux orbites : une homéomorphe à un intervalle ouvert et un équilibre qui referme l'intervalle sur lui-même. Ainsi,

l'espace des états possède la topologie d'un cercle. L'équilibre est à la fois **attractif, répulsif et instable**, ce que nous avons déjà établi en question 3, avec une modélisation différente. On reconnaît encore l'équilibre objet du paragraphe 8.2.2.

10. On a $\nabla f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x_1 & -\gamma \end{pmatrix}$, ce qui fournit le système linéarisé en e_1 :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\gamma \end{pmatrix} x \quad (\Sigma_1).$$

Le polynôme caractéristique est $P(\lambda) = \lambda^2 + \gamma\lambda - 1$.

Ses racines $\lambda = \frac{1}{2}(-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + 4})$ sont réelles de produit -1 : le système a pour indice $(1, 0, 1)$ et est donc hyperbolique. L'équilibre de Σ_1 est **instable** (de nature col : les trajectoires sont des arcs d'hyperboles).

Comme e_1 est hyperbolique, l'équilibre e_1 de Σ est lui-même **instable**.

11. $\dot{F} = \nabla F \cdot f = \begin{pmatrix} 2 \sin x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ -\sin x_1 - \gamma x_2 \end{pmatrix} = -2\gamma x_2^2 \leq 0$. Donc, F est une fonction de Liapounov, ce qui exprime le fait que le système est dissipatif.

Il en résulte que e_0 est un **équilibre stable** de Σ .

De cette première analyse, on ne peut pas encore déduire que e_0 est ou non asymptotiquement stable, car $\dot{F}$ s'annule en d'autres points que e_0 .

12. Le système linéarisé autour de e_0 est $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\gamma \end{pmatrix} x \quad (\Sigma_0)$

Le polynôme caractéristique est $P(\lambda) = \lambda^2 + \gamma\lambda + 1$. Pour tout $\gamma > 0$, ses racines sont de partie réelle $-\frac{\gamma}{2} < 0$. Le système a pour indice $(2, 0, 0)$. Il est hyperbolique, et l'équilibre de Σ_0 est donc **asymptotiquement stable**.

Il en est de même (2^e théorème de Liapounov) pour l'équilibre **e_0 de Σ** .

1^{er} cas : $\gamma < 2$ (amortissement modéré) : les valeurs propres sont $\mu \pm i\omega$, avec $\mu = -\frac{\gamma}{2}$ et $\omega^2 = \frac{1}{4}(4 - \gamma^2)$

Les trajectoires de Σ_0 sont des spirales centripètes (§ 5.2, cas n° 12) : le pendule rejoint e_0 par **oscillations amorties** : e_0 est un foyer stable.

2^e cas : $\gamma = 2$ (amortissement critique) : le polynôme caractéristique

$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1$ a une racine double $\lambda = -1$, mais le système linéarisé

$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} x$ n'est **pas semi-simple**. Son sous-espace propre est en effet réduit

à la droite générée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Le pendule rejoint e_0 *sans osciller* (§ 5.2, cas n° 8). Toute orbite de Σ_0 (autre que l'équilibre !) a dans un repère (ξ, η) convenable pour équation $\eta = \xi \ln \xi$. La courbe correspondante a un rayon de courbure nul en 0 : l'équilibre est un nœud impropre.

3^e cas : $\gamma > 2$ (amortissement fort) : $P(\lambda)$ a deux racines réelles négatives distinctes. Le pendule rejoint e_0 *sans osciller*, mais les trajectoires sont d'un type différent (§ 5.2, cas n° 1). Toute orbite de Σ_0 (autre que l'équilibre !) a dans un repère (ξ, η) convenable une équation du type $\eta = \xi^\alpha$, avec $\alpha > 0$.

13. Portrait de phases du pendule amorti, cas $\gamma < 2$:

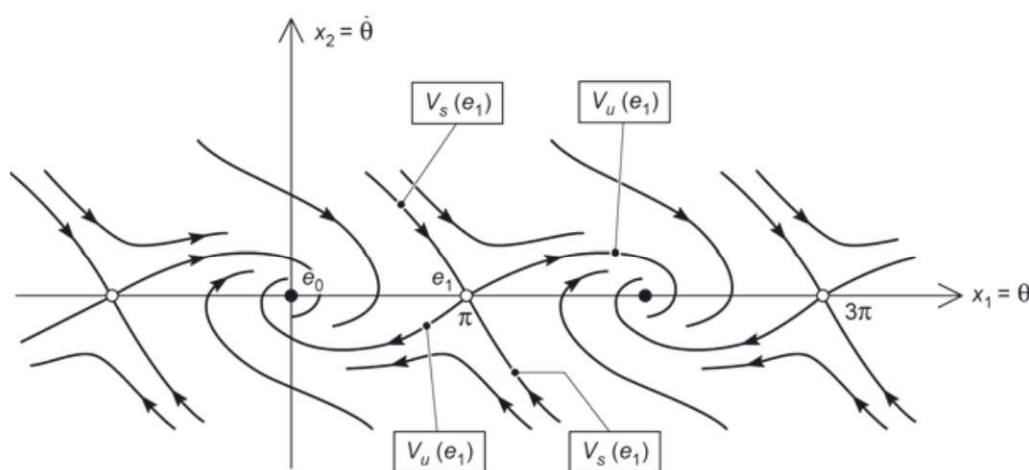


Figure 8.8 - Cas du pendule peu amorti ($\gamma < 2$).

Portrait de phases du pendule amorti, cas $\gamma > 2$:

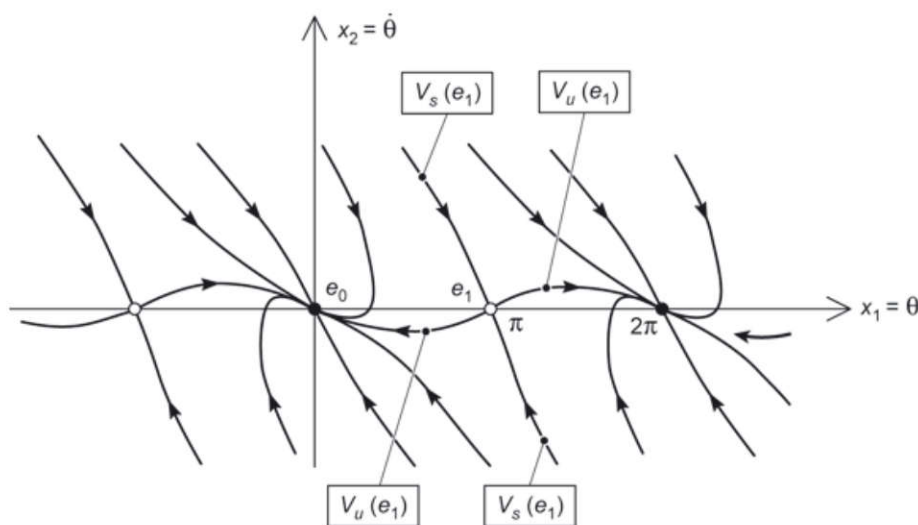


Figure 8.9 - Cas du pendule très amorti ($\gamma > 2$).

- 14. En e_0 :** L'équilibre étant hyperbolique, $V_s(x_0) = Att(x_0)$: il s'agit du domaine compris entre la variété stable $V_s(e_1)$ et sa translatée de $(-2\pi, 0)$. Ce domaine est homéomorphe à $\mathbb{R}^2$.

En e_1 : L'équilibre étant hyperbolique, $V_s(e_1) = Att(x_1)$ est la réunion de deux orbites et de $\{e_1\}$ (voir les portraits de phases).

De même, $V_u = Rep(x_1)$, réunion de deux orbites et de $\{e_1\}$ (voir les portraits de phases). Les deux orbites ont pour ensembles-limites les équilibres e_0 et $(2\pi, 0)$ et sont donc *hétéroclines*.

BIFURCATIONS LOCALES

9

9.1 INTRODUCTION

Lorsqu'un système dépend d'un paramètre μ (scalaire ou vectoriel), son comportement change-t-il qualitativement quand le paramètre varie ? Si oui, un tel changement est appelé **bifurcation** ; par abus de langage courant, on donnera le même nom à la valeur du paramètre autour de laquelle le changement se produit.

Les bifurcations sont présentes dans tout type de système :

- physico-chimique : changement d'état lorsque le paramètre (température) atteint une certaine valeur ;
- économique : effondrement d'un cours de bourse lorsque l'un des paramètres de la vie économique franchit un seuil donné ;
- mécanique : apparition d'un équilibre asymptotiquement stable lorsqu'un amortissement, aussi faible soit-il, apparaît ;
- social : basculement brutal d'un groupe dans la violence après dégradation continue de ses conditions de vie.

La liste bien sûr n'est pas close.

Deux exemples élémentaires nous montrent que les bifurcations ressortissent à deux grandes catégories.

1. Le système plan $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu - 1 \\ 1 \mu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ présente pour $\mu < 0$ l'équilibre asymptotiquement stable 0, qui devient simplement stable pour $\mu = 0$, puis instable pour $\mu > 0$. Il y a pour $\mu = 0$ une **bifurcation locale**. Hors 0, tout point x_1 reste régulier.
2. Le système plan défini en coordonnées polaires par $\begin{cases} \dot{\rho} = 0 \\ \dot{\theta} = \mu \end{cases}$ présente pour $\mu < 0$ l'équilibre unique 0. Les trajectoires sont des cercles concentriques parcourus à vitesse angulaire $\mu < 0$ constante. Pour $\mu = 0$, il y a immobilité générale : tout point devient un équilibre. Pour $\mu > 0$, on retrouve les trajectoires antérieures, mais parcourues dans le sens positif. Il y a donc eu au voisinage de **tout point** du plan un changement qualitatif du portrait de phases : il y a pour $\mu = 0$ une **bifurcation globale**.

Dans ce document, nous n'analyserons que les bifurcations **locales**. Nous savons par le théorème du redressement (§ 2.3.1) qu'en dehors des équilibres « tous les points

se valent » : deux points x_1 et x_2 réguliers sont en effet homologues dans une conjugaison, ce qui implique que les portraits de phases dans leur voisinage sont topologiquement indiscernables.

La fonction $(x, \mu) \in \Omega \times \mathbb{R} \mapsto f(x, \mu)$ est supposée continue, comme l'était en l'absence de paramètre variable la fonction $x \mapsto f(x)$. Donc, si $f(x, \mu_0) \neq 0$, une petite variation de μ autour de μ_0 pourra contenir $f(x, \mu)$ autour de $f(x, \mu_0) \neq 0$.

En d'autres termes, la propriété « x est régulier » est sauvegardée lors d'une petite variation du paramètre. Comme tous les points réguliers se valent (au sens que nous venons de rappeler), la recherche d'une bifurcation locale *n'est pertinente qu'au voisinage d'un équilibre*.

Un exemple préliminaire

Au § 5.5, nous avons étudié l'évolution d'un portrait de phases bidimensionnel en fonction d'un paramètre μ . Nous avons observé :

- pour $\mu < -1$: un équilibre unique instable ;
- pour $\mu = -1$: une infinité d'équilibres simplement stables ;
- pour $\mu > -1$: un équilibre unique asymptotiquement stable.

À la traversée de la valeur $\mu = -1$, il y a eu changement qualitatif : aucun des trois systèmes ne peut être conjugué à l'un des deux autres. Il y a eu **bifurcation**.

9.2 STABILITÉ STRUCTURELLE DES ÉQUILIBRES

9.2.1 Définition de la bifurcation locale d'un équilibre

Dans ce paragraphe, on va donner un cadre plus général et plus rigoureux aux observations faites au paragraphe précédent.

Soit donc un système d'ordre n , et dépendant d'un paramètre réel μ . Il est défini par le champ de vecteurs :

$$x \in \Omega \text{ (domaine de } \mathbb{R}^n) \mapsto f(x, \mu) \in \mathbb{R}^n$$

Désormais, nous supposons la fonction $(x, \mu) \in \Omega \times \mathbb{R} \mapsto f(x, \mu) \in \mathbb{R}^n$ de classe C^1 . Pour la valeur μ_0 du paramètre μ , soit a_0 un équilibre. On a donc $(a_0, \mu_0) \in \Omega \times \mathbb{R}$ et $f(a_0, \mu_0) = 0$.

Nous allons donner une définition « en négatif » des bifurcations en introduisant la notion de stabilité structurelle locale, c'est-à-dire de stabilité structurelle au voisinage d'un équilibre, lorsque le paramètre varie autour d'une certaine valeur μ_0 .

Définition

Soit $(a_0, \mu_0) \in \Omega \times \mathbb{R}$ avec $f(a_0, \mu_0) = 0$.

On dit qu'il y a **stabilité structurelle locale** en (a_0, μ_0) s'il existe un voisinage V_{a_0} de a_0 , un voisinage w de μ_0 et une application continue :

$$\mu \in w \mapsto a(\mu) \in \Omega \text{ telle que pour tout } \mu \in w :$$

- $f(a(\mu), \mu) = 0$, avec $a(\mu_0) = a_0$;
- il existe un voisinage V_μ de $a(\mu)$ tel que les systèmes dynamiques $(V_{a_0}, f(\cdot, \mu_0))$ et $(V_\mu, f(\cdot, \mu))$ soient topologiquement conjugués, a_0 et $a(\mu)$ étant homologues dans la conjugaison.

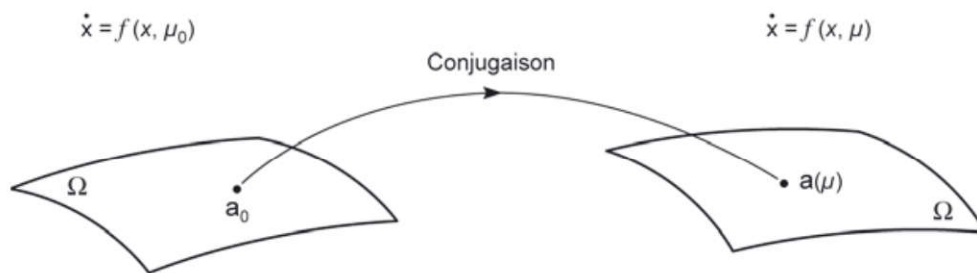


Figure 9.1 – Stabilité structurelle.

S'il n'y a pas stabilité structurelle en (a_0, μ_0) , on dit que μ_0 est une valeur de **bifurcation locale** de l'équilibre a_0 .

Exemple

Le pendule pesant (§ 8.6) fait intervenir l'amortissement γ comme paramètre. En choisissant $\theta \in \mathbb{R}/2\pi$:

- Si l'amortissement est nul (cas conservatif), il y a :
 - un équilibre instable, l'équilibre haut ;
 - un équilibre stable, mais pas asymptotiquement stable : l'équilibre bas.
- Si l'amortissement est positif (cas dissipatif), il y a :
 - comme dans le cas conservatif : un équilibre instable, l'équilibre haut ;
 - un équilibre stable, qui de plus est asymptotiquement stable : l'équilibre bas.
- Si enfin on considère un amortissement négatif, correspondant à un apport extérieur d'énergie, il y a :
 - deux équilibres instables, les deux équilibres haut et bas : l'instabilité de l'équilibre haut va de soi. Celle de l'équilibre bas e_0 résulte de ce que le linéarisé $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\gamma \end{pmatrix} x$ autour de e_0 (voir le thème d'étude, corrigé de la question 12) a pour valeurs propres deux complexes conjugués de partie réelle $-\gamma/2 > 0$.

Le portrait de phases change au voisinage de l'équilibre stable : les trajectoires périodiques (amortissement nul) deviennent des spirales centripètes (amortissement positif). Il y a donc bifurcation locale, mais seulement au voisinage de l'équilibre stable. L'équilibre haut reste instable : il y a stabilité structurelle au voisinage de cet équilibre.

9.2.2 Stabilité structurelle des équilibres hyperboliques

Nous venons de voir que le système « pendule » présente une bifurcation lorsque l'amortissement est nul. La bifurcation concerne l'équilibre bas. Le système linéarisé y admet deux valeurs propres imaginaires pures conjuguées, et n'est donc pas hyperbolique. En revanche, l'équilibre haut, qui est hyperbolique, n'est pas localement affecté par la bifurcation. Cette constatation (bifurcation en un équilibre non-hyperbolique) illustre un résultat plus général que nous allons donner, et qu'on peut baptiser *stabilité structurelle des équilibres hyperboliques*.

Nous avons établi au chapitre 4 la stabilité structurelle des systèmes *linéaires* hyperboliques : si A_0 est un endomorphisme hyperbolique, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si $\|A_0 - A\| < \varepsilon$, alors A est hyperbolique de même indice que A_0 .

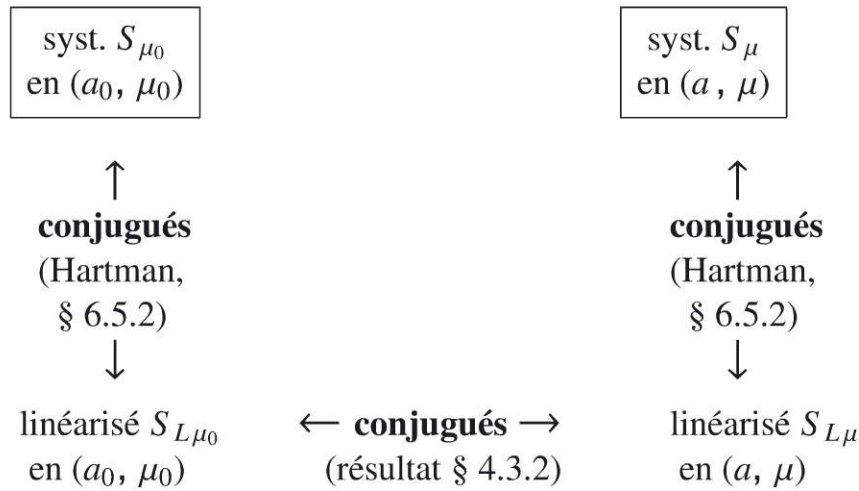
Nous allons étendre ce résultat localement aux systèmes non-linéaires grâce au théorème de Hartman-Grobman.

Soit S_μ le système $\dot{x} = f(x, \mu)$, la fonction $(x, \mu) \mapsto f(x, \mu)$ étant de classe C^1 . Soit a_0 un équilibre *hyperbolique* de S_{μ_0} . Le caractère hyperbolique implique qu'en (a_0, μ_0) , ∇f est inversible.

Il existe donc (théorème des fonctions implicites) dans un intervalle ouvert w contenant μ_0 une fonction de classe C^1 :

$$\mu \mapsto a(\mu) \text{ telle que } \begin{cases} f[a(\mu), \mu] = 0 \\ a(\mu_0) = a_0 \end{cases}$$

En d'autres termes, une variation de μ autour de μ_0 entraîne un déplacement régulier (au sens de dérivable par rapport à μ) de l'équilibre. D'après le théorème de persistance du caractère hyperbolique (§ 4.3.1), on peut choisir w et un voisinage V_{a_0} de a_0 tels que ∇f garde le même indice pour $(x, \mu) \in V_{a_0} \times w$. Les systèmes linéarisés $S_{L\mu_0}$ et $S_{L\mu}$ ayant donc le même indice, on peut établir le schéma :



Par transitivité de la conjugaison, S_{μ_0} et S_{μ} sont conjugués, ce qui démontre le résultat cherché :

Théorème de stabilité structurelle locale

Soit a_0 un équilibre hyperbolique du système $\dot{x} = f(x, \mu) = 0$, système pour lequel la fonction $(x, \mu) \mapsto f(x, \mu)$ est de classe C^1 . Alors, il existe :

- *un voisinage w de μ_0 ;*
- *une fonction $\mu \mapsto a(\mu)$ de classe C^1 de w dans $\mathbb{R}^n$ telle que $a(\mu_0) = a_0$ et $f(a(\mu), \mu) = 0$.*

tels que pour tout μ appartenant au voisinage w , tous les systèmes non-linéaires $f(\cdot, \mu)$ sont conjugués entre eux au voisinage, pour chacun, de son équilibre $a(\mu)$.

En langage usuel : au voisinage d'un équilibre hyperbolique, le comportement qualitatif d'un système n'est pas affecté par une petite modification de ce dernier.

La stabilité structurelle locale exclut toute bifurcation locale. Par conséquent, ***il ne peut y avoir bifurcation locale qu'au voisinage d'un équilibre non-hyperbolique.***

Ce résultat explique – et permet de généraliser – le constat que nous avons fait au § 9.2.1 sur la bifurcation du pendule.

9.3 BIFURCATIONS LOCALES EN DIMENSION 1

Nous nous plaçons dans le cas où $x \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Un équilibre non-hyperbolique est par définition caractérisé par le fait qu'une au moins des valeurs propres du système linéarisé ∇f_a est sur l'axe imaginaire. En dimension 1, cette valeur propre ne peut être que nulle, ce qui signifie plus radicalement que $\nabla f_a = \frac{\partial f}{\partial x}(a) = 0$.

L'analyse des bifurcations peut utilement être menée à partir du développement de Taylor de $f(x, \mu)$ relativement aux deux variables x et μ :

$$f(x, \mu) = a_{00} + a_{10}\mu + a_{01}x + a_{20}\mu^2 + a_{11}\mu x + a_{02}x^2 + \dots$$

Au prix d'un simple décalage en x et en μ , on recherche une bifurcation en $(0, 0)$. On a alors $a_{00} = 0$, et la condition $\nabla f = 0$ impose de plus $a_{01} = 0$. Les divers schémas de bifurcation dépendent des valeurs des coefficients a_{ij} .

La bifurcation la plus simple que l'on puisse imaginer correspond à $a_{10} = 1$, tous autres coefficients étant nuls : on a donc $\dot{x} = \mu$. Il y a équilibre stable (immobilité de tous les états) pour $\mu = 0$, aucun équilibre sinon. Le tracé du portrait de phases en fonction de μ , qu'on appelle **diagramme de bifurcation**, est le suivant :

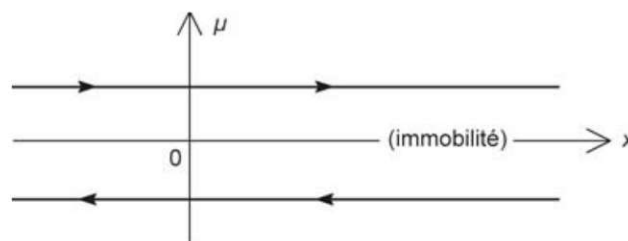


Figure 9.2 - Bifurcation globale $\mu = 0$ pour $\dot{x} = \mu$.

Une autre bifurcation très simple est obtenue avec $a_{11} = 1$, tous autres coefficients étant nuls, donc $\dot{x} = \mu x$. L'équilibre 0 est asymptotiquement stable pour $\mu < 0$, simplement stable pour $\mu = 0$, instable pour $\mu > 0$. On a le diagramme :

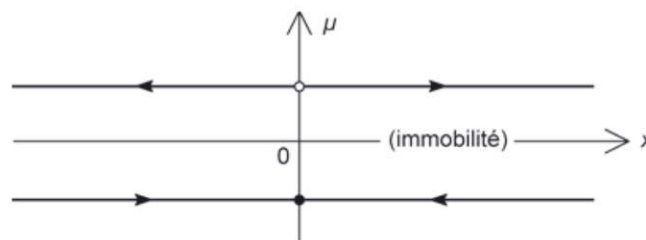


Figure 9.3 - Bifurcation globale $\mu = 0$ pour $\dot{x} = \mu x$.

Nous remarquons que, dérogeant à l'intitulé du paragraphe, ces deux premières bifurcations sont **globales**.

Avec des exemples plus complexes, la variété des schémas de bifurcation est infinie : on peut par exemple passer de 0 équilibre à $2n$ équilibres, avec le système $\dot{x} = (x^2 - \mu)(x^2 - 2\mu) \dots (x^2 - n\mu)$, qui présente la bifurcation locale $\mu = 0$, et dont voici le diagramme pour $n = 3$:

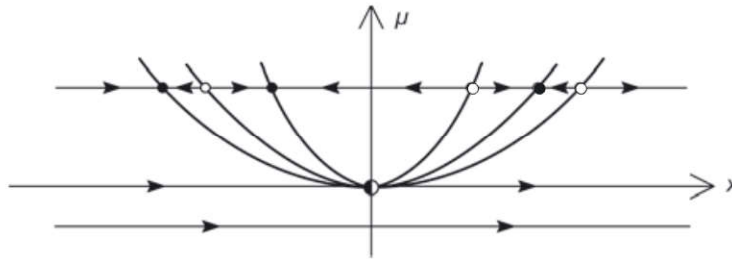


Figure 9.4 – Bifurcation locale polynômiale.

Les bifurcations non-triviales les plus courantes correspondent aux polynômes de Taylor de plus faible degré en (x, μ) . Elles font l'objet des paragraphes suivants.

9.3.1 Bifurcation nœud-col

La **bifurcation nœud-col** correspond à $a_{10} = -1$ et $a_{02} = 1$, tous autres a_{ij} étant nuls.

On a donc $\dot{x} = x^2 - \mu$, système dont l'analyse est aisée :

- pour $\mu < 0$, il n'y a aucun équilibre ;
- pour $\mu = 0$, $x = 0$ est un équilibre instable ; plus précisément il est « stable à gauche » et « instable à droite », donc semi-stable ;
- pour $\mu > 0$, il y a deux équilibres : l'équilibre asymptotiquement stable $-\sqrt{\mu}$ et l'équilibre instable $\sqrt{\mu}$.

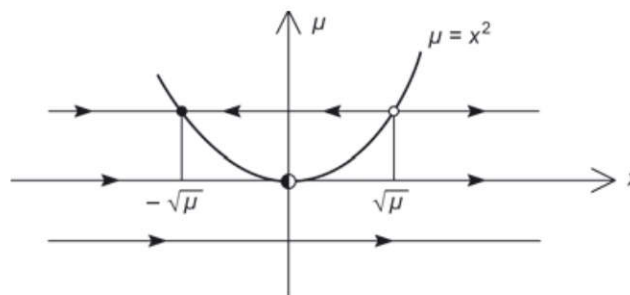


Figure 9.5 – Diagramme de la bifurcation nœud-col.

Remarque

L'intitulé « nœud-col », on le voit, signifie « nœud + col » et non « nœud → col ». Car on passe de zéro équilibre à 2 équilibres (un nœud et un col).

9.3.2 Bifurcation d'échange de stabilité (transcritique)

La **bifurcation transcritique** correspond à $a_{11} = -1$ et $a_{02} = 1$, tous autres a_{ij} étant nuls. On a donc $\dot{x} = x^2 - \mu x$, système présentant un ou deux équilibres :

- pour $\mu < 0$, il y a l'équilibre asymptotiquement stable μ et l'équilibre instable 0 ;

- pour $\mu = 0$, $x = 0$ est un équilibre instable : c'est comme pour la bifurcation nœud-col l'équilibre semi-stable du système $\dot{x} = x^2$;
- pour $\mu > 0$, il y a deux équilibres : l'équilibre asymptotiquement stable 0 et l'équilibre instable μ .

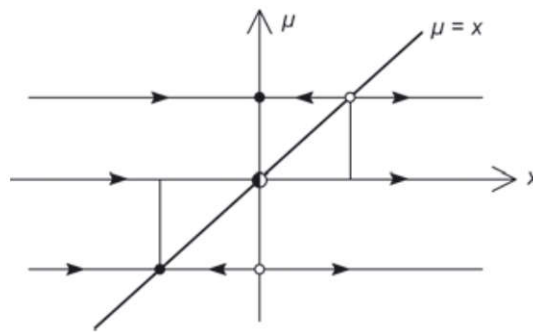


Figure 9.6 - Diagramme de la bifurcation transcritique.

9.3.3 Bifurcation fourche

La **bifurcation fourche** correspond à $a_{11} = -1$ et $a_{03} = 1$, tous autres a_{ij} étant nuls.

On a donc $\dot{x} = x^3 - \mu x$, système qui s'analyse ainsi :

- pour $\mu < 0$, il y a le seul équilibre 0, qui est instable ;
- pour $\mu = 0$, on a $\dot{x} = x^3$: 0 est toujours l'équilibre unique, instable ;
- pour $\mu > 0$, il y a trois équilibres : l'équilibre asymptotiquement stable 0, et les deux équilibres instables $\pm \sqrt{\mu}$.

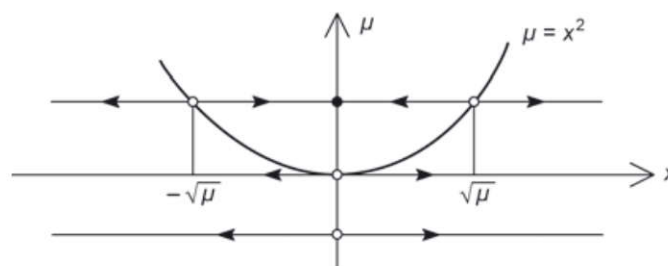


Figure 9.7 - Diagramme de la bifurcation fourche.

Une remarque lexicographique

« Bifurcation » signifie étymologiquement « deux fourches » (du latin *forca*, la fourche). Or, une fourche est un instrument présentant deux dents ou plus. Au sens strict, une bifurcation comporterait donc au moins 4 dents. Le dictionnaire corrige ce pléonasm en ramenant la bifurcation à 2 branches.

Quant à l'énoncé « bifurcation fourche », il serait sans doute avantageusement remplacé par le vocable plus fidèle « trident », mais qui est inusité dans ce sens.

Exercice 9.1 *Bifurcation d'un système polynomial de dimension 1*

On considère le système $\dot{x} = \mu x(x^2 - \mu^2)$, où $x \in \mathbb{R}$, μ étant un paramètre réel.

1. Déterminer ses équilibres. Linéariser le système autour de chacun d'entre eux.
2. Tracer et commenter le diagramme de bifurcation du système.

Exercice 9.2 *Bifurcation d'un système non-linéaire de dimension 1*

On considère le système $\dot{x} = \mu x - \sin x$, où $x \in \mathbb{R}$, et $\mu \in [2/\pi, +\infty[$.

1. Montrer que, pour une plage de valeurs de μ qu'on déterminera, le système possède trois équilibres dont deux opposés qu'on notera $-a(\mu)$ (négatif) et $a(\mu)$ (positif).
2. Tracer le portrait de phases du système. En déduire la nature des équilibres.
3. Ce portrait atteste-t-il une bifurcation ? Si oui : de quel type ?
4. Pour quelles valeurs de μ la fonction $F(x) = x^2$ est elle une fonction de Liapounov au voisinage de l'équilibre zéro ?

9.4 BIFURCATIONS LOCALES EN DIMENSION SUPÉRIEURE À 1

La variété des bifurcations est déjà très grande en dimension 1. Elle l'est encore plus en dimension supérieure à 1 : aussi nous limiterons-nous à l'exemple le plus classique, qui est celui de la **bifurcation de Hopf** en dimension 2.

Il ne s'agit plus de la scission ou fusion d'équilibres comme en dimension 1, mais de la disparition d'un équilibre au profit d'un équilibre de nature différente et d'un **cycle-limite**, notion inconnue en dimension 1. On se place sur $\Omega = \mathbb{R}^2$, plan euclidien sur lequel on définit le flot suivant en coordonnées polaires :
$$\begin{cases} \dot{\rho} = \mu \rho - \rho^3 \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

Ce système représente bien un flot, car hors de l'équilibre unique 0, la deuxième équation est définie sans ambiguïté. Quel que soit μ , l'équivalence de ρ et $-\rho^3$ pour ρ grand implique l'existence d'une naissance implosive ; pour le montrer, le problème 1.1 donne un schéma de raisonnement.

Pour $\mu < 0$: hors de l'équilibre, $\dot{\rho} = \mu\rho - \rho^3$ se comporte pour ρ faible comme $\mu\rho$: il y a décroissance exponentielle de ρ . On a un *foyer attractif*.

Pour $\mu = 0$: $\dot{\rho} = -\rho^3$ s'intègre en $\rho^2 = \frac{\rho_0^2}{1 + 2\rho_0^2 t}$
(naissance implosive à $t = t_i = -\frac{1}{2\rho_0^2}$).

Il y a décroissance « molle » de ρ , équivalent à $1/\sqrt{2}t$
On a toujours un *foyer attractif*.

Pour $\mu > 0$: $\dot{\rho} = 0$ pour $\rho = \sqrt{\mu}$. L'équilibre 0 subsiste mais change de nature : il devient un *foyer répulsif*.

Il y a apparition d'un *cycle-limite stable*, qui est le cercle $\rho = \sqrt{\mu}$.

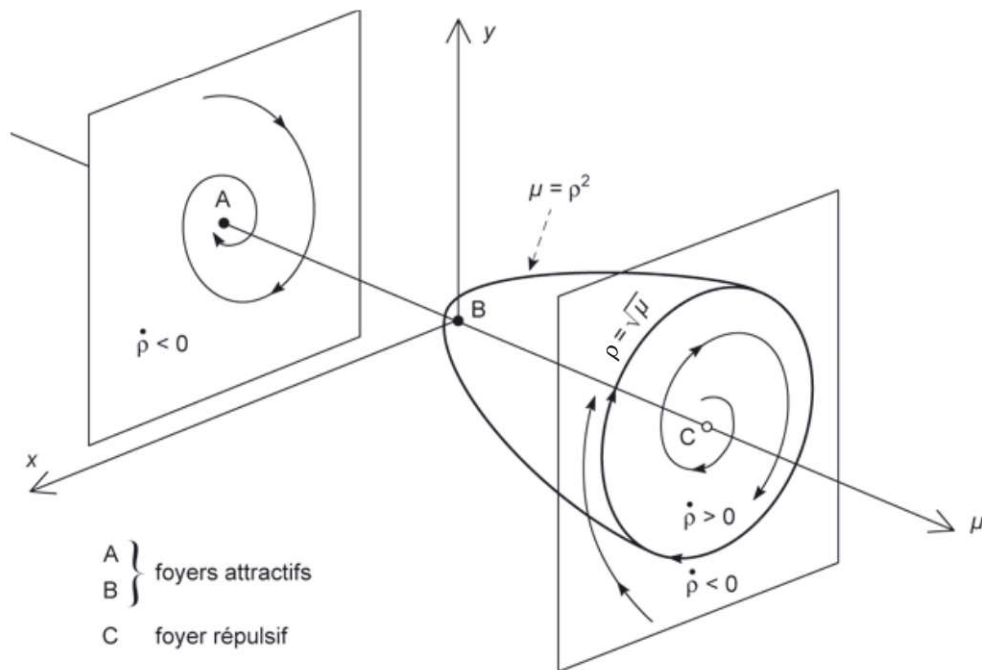


Figure 9.8 – Diagramme de la bifurcation de Hopf.

Le système miroir $\dot{x} = -f(x)$ se déduit du précédent en inversant le cours du temps. La bifurcation est toujours dite bifurcation de Hopf, mais les équilibres A , B et C deviennent des foyers répulsifs (A et B) et attractif (C). Il y a mort explosive pour toute valeur de μ .

Problème 9.1 *Un système non-linéaire de dimension 2*

On considère le système $\dot{z} = f(z)$, dans lequel z et $f(z)$ appartiennent à $\mathbb{R}^2$ euclidien.

En posant $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\|z\| = r$, f a pour expression

$$f(z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} + \mu z (1 - r^2), \mu \text{ étant un paramètre réel.}$$

1. Vérifier que $\|\dot{z}\|^2 = r^2[1 + \mu^2(1 - r^2)^2]$.
2. En déduire que $z_0 = 0$ est le seul équilibre du système.
3. Déterminer la différentielle ∇f du champ f .
4. (a) Discuter de la stabilité de l'équilibre z_0 en fonction de μ .
(b) Le système présente-t-il des bifurcations ?
5. Tracer les trois portraits de phases correspondant respectivement à $\mu = 0$, $\mu = -1$ et $\mu = 1$.
6. Montrer que, pour $\mu = 1$, il y a un cycle-limite, qu'on déterminera.

SYSTÈMES À TEMPS DISCRET : ÉQUILIBRES ET CYCLES

10

Les systèmes à temps discret, par la variété et la difficulté des problèmes qu'ils posent, sont déjà intrinsèquement intéressants. En outre, certaines notions nécessaires pour définir le chaos en temps continu, objet du chapitre 11, font appel à la dynamique des systèmes à temps discret.

10.1 INTRODUCTION

Certains systèmes font intervenir des grandeurs qui sont par nature à temps discret, par exemple :

- de nombreux cas en théorie des jeux ;
- un indice boursier lors de l'ouverture ou de la clôture de séance ;
- la distance Terre-Soleil lors des périhélie successifs.

En tout état de cause, la connaissance des systèmes à temps discret s'impose lors de l'étude des systèmes à temps continu, ceci pour plusieurs raisons.

- Pour effectuer la résolution numérique d'un système différentiel à temps continu, on discrétise le temps à un pas fini h et grâce à un développement de Taylor, on remplace le système initial par un système d'équations aux différences, qui devient par essence à temps discret (voir l'annexe 7). Les ordinateurs ne connaissent pas le continu.
- En dehors même de la logique précédente, l'échantillonnage à la période h (ou même à des intervalles non rigoureusement égaux, comme l'exemple « Terre-Soleil » ci-dessus) d'un système à temps continu conduit à un système à temps discret.
- En temps continu, les trajectoires issues d'un point x_0 peuvent rencontrer une variété *transverse* (non tangente au flot) en des points successifs $x_1, x_2, \dots$ (figure 10.1) qui définissent un système à temps discret, de trajectoire $k \in \mathbb{N}^* \mapsto x_k$. Il s'agit de l'**application de premier retour**, notion introduite par Poincaré et qui se révèle particulièrement fructueuse, ne serait-ce que parce que la dynamique sur la variété transverse est d'une dimension inférieure à celle du système initial. Nous rencontrerons au chapitre suivant cette application.

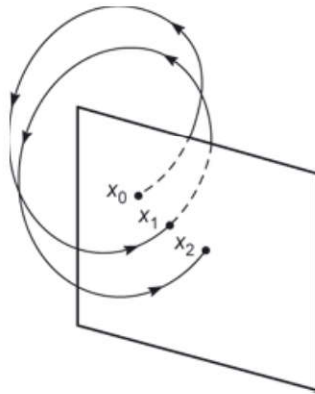


Figure 10.1 - Le premier retour.

10.2 NOTIONS DE BASE

Pour les systèmes à temps discret, nous retrouvons des notions sinon identiques, tout au moins analogues à celles déjà définies pour les systèmes à temps continu.

L'état $x \in \mathbb{R}^n$ évolue en fonction du temps, qui est par nature **discret** : nous le notons k . Il appartient dans la majorité des cas à l'ensemble des entiers naturels ou relatifs : $k \in \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$. La valeur $x(k)$ de x à l'instant k sera notée x_k .

On peut accéder à la connaissance de x_k :

- soit par une formule explicite $x_k = \varphi(k)$;
- soit par une loi de récurrence regroupant la valeur initiale x_0 et une équation d'évolution $x_{k+1} = f(x_k)$. C'est cette forme qui s'apparente le plus à ce que nous avons traité en temps continu ;
- soit par tout autre moyen.

À l'image de ce que nous avons fait en temps continu, le système étudié est :

$$\boxed{x_{k+1} = f(x_k)} \quad (S_D)$$

dans lequel f est une fonction de classe C^1 sur un **ouvert** $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. En temps discret, nous n'exigeons pas la connexité de Ω . On en saisit les raisons en considérant l'exemple très simple $x_{k+1} = -x_k$ sur $\Omega = \mathbb{R}^*$, non-connexe.

On a donc $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, ..., $x_k = f(x_{k-1})$, ...

Ainsi, si $\circ$ représente la composition des applications, on a :

$$x_k = f^k(x_0), \text{ avec } f^k = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{k \text{ fois}} \text{ (application parfois notée aussi } f^{ok}).$$

On appelle :

- **trajectoire** du système une solution $x_0, x_1, \dots, x_k, \dots$ de l'équation (S_D) , c'est-à-dire un ensemble discret de points de $\mathbb{R}^n$ pourvus individuellement d'une étiquette « temps » ;
- **orbite** l'ensemble des x_k correspondants.

Alors que la trajectoire est un ensemble gradué en k (temps), l'orbite est un ensemble non gradué. Dans les ouvrages et articles sur le sujet, on pourra trouver quelques écarts par rapport à ces définitions ; les deux termes sont parfois présentés comme synonymes, avec l'une ou l'autre des deux définitions. Nous avons fait une remarque analogue pour les systèmes à temps continu.

Quelle que soit la régularité de la fonction f , il y a **déterminisme** : la connaissance de x_i entraîne celle de tous les x_j (où $j \geq i$). Mais il n'y a pas nécessairement déduction du passé, comme le montre l'exemple élémentaire $x_{k+1} = x_k^2$, pour lequel tout état positif a deux antécédents possibles, opposés. En temps discret, on n'a donc pas l'équivalent du théorème de Cauchy.

Le **flot** se définit comme pour les systèmes à temps continu : le flot du système dynamique est l'application qui au couple (k, x_0) associe x_k . Connaître le flot du système revient donc à connaître l'application $\phi(k, x_0)$ ainsi définie :

$\phi(k, x_0)$ est l'état à l'instant k du système d'état initial x_0 .

Naturellement, compte tenu de ce qui précède, les valeurs de k dans la définition du flot ne peuvent être que positives ou nulles.

Remarques

- L'échantillonnage au pas temporel h de l'état d'un système S à temps continu $\dot{x} = g(x)$ de flot $\phi(t, x)$ définit un système à temps discret S_D , ceci quel que soit h . En effet, si on pose $x_k = x(kh)$ pour $k \in \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, on a $x_{k+1} = \phi(h, x_k)$: cette dernière fonction n'est autre que la fonction $f(x_k)$ définissant l'équation d'évolution de S_D . La définition de x_k n'est toutefois opérante que si $kh \in J(x_0)$, plage temporelle de x_0 , c'est-à-dire l'ensemble des temps $k \in \mathbb{N}$ pour lesquels x_k est défini.
- Mais un système à temps discret **ne résulte pas** nécessairement de l'échantillonnage d'un système à temps continu. Par exemple, dans $\mathbb{R}$, les trajectoires du système $x_{k+1} = -x_k$ sont des cycles $(a, -a, a, -a, \dots)$: ils ne peuvent pas provenir de l'échantillonnage d'une trajectoire définie en temps continu sur $\mathbb{R}$, car une telle trajectoire ne repasse jamais par un point qu'elle a quitté.

10.3 ÉQUILIBRES

Soit un système $x_{k+1} = f(x_k)$, avec $x_k \in \mathbb{R}^n$.

Définition

x est un **équilibre** si et seulement si $f(x) = x$.

Comme en temps continu, un équilibre est encore appelé point fixe, ou point d'équilibre, ou point stationnaire, parfois point critique.

Si x n'est pas un équilibre, c'est un **point régulier**.

Dans le cas d'un système **linéaire** $f(x) = Ax$, l'ensemble des équilibres x vérifie $Ax = x$, d'où $(A - I)x = 0$. L'ensemble $\mathcal{E}$ des équilibres est alors $\text{Ker}(A - I)$: c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$; il contient toujours le point 0.

Les notions de **stabilité**, **attractivité**, **instabilité** et autres notions conjointes se définissent comme en temps continu. On peut donc reprendre formellement les définitions déjà vues : on substitue seulement au temps continu t un temps discret k . Les notions de puits, sources, équilibres attractifs ou répulsifs, etc. subsistent également.

Le cas des systèmes linéaires se traite par une approche analogue à celle faite en temps continu. Dans une base convenable de l'espace d'état, l'équation d'évolution est $x_{k+1} = Ax_k$, la matrice A étant sous forme réduite de Jordan.

Par une récurrence évidente, on obtient l'expression explicite du flot :

$$x_k = \phi(k, x_0) = A^k x_0$$

10.3.1 Flot des systèmes linéaires semi-simples

Dans le cas d'un système semi-simple, on a :

a) Cas où A est semi-simple

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_l & & \\ & & & \Lambda_{l+1} & \\ 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & \Lambda_q \end{bmatrix} \quad \text{avec } \Lambda_j = \begin{pmatrix} \mu_j & -\omega_j \\ \omega_j & \mu_j \end{pmatrix}$$

On écrira ici plus opportunément $\Lambda_j = \rho_j \begin{pmatrix} \cos \theta_j & -\sin \theta_j \\ \sin \theta_j & \cos \theta_j \end{pmatrix}$, avec $\rho_j = \sqrt{\mu_j^2 + \omega_j^2}$, $\cos \theta_j = \frac{\mu_j}{\rho_j}$ et $\sin \theta_j = \frac{\omega_j}{\rho_j}$. Les valeurs propres de A sont les λ_i et les $\rho_j e^{\pm i\theta_j}$

$$A^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_l^k & \\ & & & \Lambda_{l+1}^k & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & & \Lambda_q^k \end{bmatrix}$$

Le rôle joué en temps continu par $e^{\lambda_i t}$ (resp. $e^{\Lambda_j t}$) est joué ici par λ_i^k (resp. Λ_j^k) dont le comportement pour $k \rightarrow \infty$ dépend du **module** de λ_i (resp. ρ_j).

Comme en temps continu, $E = \mathbb{R}^n$ (avec $n = 2q - l \geq q$) est la somme directe de q sous-espaces vectoriels invariants par A : $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_q$. Les E_i étant invariants par A , l'étude du flot se ramène à **l'étude du flot sur chacun des E_i** , donc sur des sous-espaces vectoriels de dimension 1 (associés à λ_i) ou 2 (associés à Λ_j). Le flot s'exprime en effet au moyen d'une matrice diagonale par blocs, les blocs étant de dimension 1 ou 2, $R(k\theta)$ étant la matrice 2×2 de la rotation d'angle $k\theta$:

$$x_k = \phi(k, x_0) = \begin{pmatrix} \text{diag}[\lambda^k] & 0 \\ 0 & \text{diag}[\rho^k \cdot R(k\theta)] \end{pmatrix} \cdot x_0$$

Cette forme montre qu'au sein de chaque sous-espace E_i la stabilité de l'équilibre 0 est conditionnée par le **module de λ ou de ρ** correspondant à E_i .

Lorsque k tend vers l'infini, λ^k tend vers 0 si $|\lambda| < 1$, vaut ± 1 si $|\lambda| = 1$, et tend vers l'infini en module si $|\lambda| > 1$. Comme la même constatation vaut pour ρ , il est naturel de définir ainsi les sous-espaces E_s , E_c et E_u :

1) E_s =sous-espace stable de A	=	somme directe des sous-esp. E_i associés à des v.p. de module :	1) inférieur à 1
2) E_c =sous-espace central de A			2) égal à 1
3) E_u =sous-espace instable de A			3) supérieur à 1

Comme pour les systèmes à temps continu, les indices s , c et u désignent les adjectifs anglais « stable », « central » et « unstable ».

On a naturellement : $E = E_s \oplus E_c \oplus E_u$.

Ce résultat est formellement identique à celui obtenu en temps continu au § 4.2.1. En ce qui concerne l'influence des zones d'appartenance des valeurs propres de A sur la stabilité, nous venons d'observer (et continuerons dans la suite à observer) la correspondance temps continu / temps discret suivante :

temps continu	/	temps discret
plan complexe	/	plan complexe
axe imaginaire	/	cercle unité
demi-plan gauche	/	intérieur du cercle unité
demi-plan droit	/	extérieur du cercle unité

Trajectoires dans les sous-espaces invariants

E se décompose en sous-espaces vectoriels invariants par A de dimension 1 ou 2.

• Trajectoires dans $E_i \subset E_s$

a) $|\lambda| < 1$ $\dim E_i = 1$; $x_k = \lambda^k x_0$.

- si $\lambda > 0$, les états x_k tendent vers 0 en gardant le signe de x_0 ;
- si $\lambda < 0$, la suite des x_k tend vers 0 et est alternée.
- si $\lambda = 0$, x_k rallie la valeur 0 dès $k = 1$.

Ce dernier cas est lié à l'exercice (très facile !) suivant.

Exercice 10.1 Deux trajectoires sécantes

Pour un système *linéaire* à temps discret, donner un exemple de non-unicité de trajectoire (un x_k donné peut provenir de deux x_0 différents).

b) $\rho < 1$ $\dim E_i = 2$; $x_k = \rho^k [R(\theta)]^k x_0 = \rho^k R(k\theta) x_0$.

$R(\alpha)$, rappelons-le, est dans $\mathbb{R}^2$ euclidien la matrice de la rotation d'angle α . Les x_k sont angulairement équidistants (vus de 0) et sont situés sur une *spirale logarithmique*. Leur distance ρ^k à 0 tend vers 0 quand $k \rightarrow \infty$.

Dans les deux cas a) et b), l'équilibre 0 étant stable et attractif, le système réduit à E_i est *asymptotiquement stable*.

Nous écartons $\theta = 0$ ou π , car on a alors la racine double réelle $\pm\rho$ et on se rattache au cas a).

• Trajectoires dans $E_i \subset E_c$

a) $|\lambda| = 1$ $\dim E_i = 1$;

- si $\lambda = 1$, la suite des x_k est constante.
- si $\lambda = -1$, la suite des x_k est le cycle $x_0, -x_0, x_0, -x_0, \dots$

Le système réduit à E_i est *simplement stable*.

b) $\rho = 1$ $\dim E_i = 2$; $x_k = [R(\theta)]^k x_0 = R(k\theta) x_0$.

Les x_k sont situés sur un *cercle*.

- si $\theta/\pi \in \mathbb{Q}$, la trajectoire est périodique ; l'orbite est un polygone régulier ;
- si $\theta/\pi \notin \mathbb{Q}$, l'orbite est dense sur le cercle de centre 0 et de rayon $|x_0|$ (application de l'exercice 8.2).

Le système réduit à E_i est *simplement stable*.

• **Trajectoires dans $E_i \subset E_u$** (pour $x_0 \neq 0$)

a) $|\lambda| > 1$ $\dim E_i = 1$; $x_k = \lambda^k x_0$.

- si $\lambda > 1$, les états x_k tendent vers $\pm\infty$ en gardant le signe de x_0 ;
- si $\lambda < -1$, la suite des x_k tend vers l'infini en valeur absolue et est alternée.

b) $\rho > 1$ $\dim E_i = 2$; $x_k = \rho^k R(k\theta) x_0$.

Les x_k sont situés sur une **spirale logarithmique**. Leur distance ρ^k à 0 tend vers l'infini quand $k \rightarrow \infty$.

Dans les deux cas a) et b), l'équilibre est instable et répulsif. Le système réduit à E_i est **instable**.

10.3.2 Flot d'un système linéaire quelconque

Nous rappelons que dans une base convenable (voir l'annexe 4), A est bloc-diagonale, les blocs (blocs de Jordan) ayant pour formes :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \text{ et } K = \begin{pmatrix} \Lambda & I & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & I \\ & & & \Lambda \end{pmatrix}$$

$$\text{les matrices } 2 \times 2 \text{ } \Lambda \text{ et } I \text{ sont } \Lambda = \begin{pmatrix} \mu & -\omega \\ \omega & \mu \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La forme J est associée à la valeur propre réelle λ , la forme K aux valeurs propres $\mu \pm i\omega$. Comme dans le cas semi-simple, E est somme directe de sous-espaces E_i associés chacun à un bloc de forme J ou K . L'étude du flot se ramène à l'étude du **flot sur chacun des E_i** . En effet, $x_k = \phi(k, x_0) = A^k x_0$, et A^k est constituée de blocs diagonaux de forme J^k ou K^k .

[1] Notant p la dimension de J et I_p la matrice unité de dimensions $p \times p$, nous avons $J = \lambda I_p + N$, où N est la matrice nilpotente d'ordre p constituée de zéros, à l'exception de la surdiagonale constituée de « 1 ». Comme N^q est nulle pour $q \geq p$, le développement de J^k ne comporte que p termes :

$$J^k = \lambda^k I_p + \binom{k}{1} \lambda^{k-1} N + \binom{k}{2} \lambda^{k-2} N^2 + \dots + \binom{k}{p-1} \lambda^{k-p+1} N^{p-1}$$

Tous les termes ont un sens car on s'intéresse au comportement de l'état lorsque $k \rightarrow \infty$ et on peut donc supposer $k \geq p-1$. On peut écrire, plus globalement :

$$J^k = \sum_{m=0}^{p-1} \binom{k}{m} \lambda^{k-m} N^m \quad (\text{avec la convention } N^0 = I_p).$$

Comme $\binom{k}{m} = \frac{k(k-1)\cdots(k-m+1)}{m!}$ est un polynôme en k , le comportement pour k grand est conditionné, comme dans les systèmes semi-simples, par la valeur absolue de λ .

[2] Notons $2p$ la dimension de K et I la matrice unité de dimensions 2×2 .

Λ peut être mise sous la forme $\Lambda = \rho \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}}_R$, avec $\rho = \sqrt{\mu^2 + \omega^2}$.

R est la matrice de la rotation plane d'angle θ tel que $\mu = \rho \cos \theta$ et $\omega = \rho \sin \theta$.

$$\text{On a ainsi } K = \begin{pmatrix} \rho R & I & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & I \\ & & & \rho R \end{pmatrix}.$$

On remarque la ressemblance formelle avec J : au scalaire λ correspond la matrice ρR , qui représente la similitude plane de rapport ρ et d'angle θ . Et au scalaire 1 correspond la matrice unité I de dimension 2×2 . Enfin, N est définie comme au § 4.2.2, cas [2]. On obtient :

$$K^k = \sum_{m=0}^{p-1} \binom{k}{m} \text{diag}[(\rho R)^{k-m}] N^m \quad (\text{avec la convention } N^0 = I_{2p})$$

Comme $\binom{k}{m}$ est un polynôme en k , le comportement pour k grand est conditionné, comme dans les systèmes semi-simples, par la valeur de ρ .

Les espaces E_s , E_c et E_u se définissent comme dans le cas des systèmes semi-simples (§ 10.3.1), et on a toujours $E = E_s \oplus E_c \oplus E_u$.

Deux exemples de flot

Voici deux exemples de flot dans des espaces E_i :

- Espace E_i de dimension 3 associé à une valeur propre réelle λ :

$$\text{Le flot est : } x_k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{1}{2}k(k-1)\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{pmatrix} \cdot x_0$$

- Espace E_i de dimension 6 associé à des valeurs propres complexes conjuguées $\mu \pm i\omega$:

$$\text{Le flot est : } x_k = \begin{pmatrix} (\rho R)^k & k(\rho R)^{k-1} & \frac{1}{2} k(k-1)(\rho R)^{k-2} \\ 0 & (\rho R)^k & k(\rho R)^{k-1} \\ 0 & 0 & (\rho R)^k \end{pmatrix} \cdot x_0$$

La matrice est de dimension 6×6 , car chacun de ses 9 éléments figurés est une matrice 2×2 .

Trajectoires dans les sous-espaces invariants

Les sous-ensembles invariants par A sont de dimension p ou $2p$, p ayant été précédemment défini. Relativement à la stabilité, le comportement de x_k est de même nature que dans le cas semi-simple, sauf dans le sous-espace central, dans lequel l'équilibre 0 peut être stable ou instable, selon la valeur de p .

- **Trajectoires dans $E_i \subset E_s$**

- $|\lambda| < 1$ $\dim E_i = p$: pour tout $x_0 \in E_i$, $\lim_{k \rightarrow \infty} J^k x_0 = 0$
- $\rho < 1$ $\dim E_i = 2p$: pour tout $x_0 \in E_i$, $\lim_{k \rightarrow \infty} K^k x_0 = 0$. Dans les 2 cas, l'équilibre 0 du système réduit à E_i est stable et attractif, donc **asymptotiquement stable**.

- **Trajectoires dans $E_i \subset E_c$**

- $|\lambda| = 1$ $\dim E_i = p$: alors, $\lambda = \pm 1$ et J^k se réduit à $J^k = \sum_{m=0}^{p-1} \binom{k}{m} (\pm 1)^{k-m} N^m$. Dans ces conditions, lorsque $k \rightarrow \infty$:

- $\|x_k\|$ reste borné si $p = 1$;
- $\|x_k\| \rightarrow +\infty$ si $p > 1$, ceci pour tout $x_0 \neq 0$

- $\rho = 1$ $\dim E_i = 2p$: alors, K^k se réduit à $K^k = \sum_{m=0}^{p-1} \binom{k}{m} \text{diag}[R^{k-m}] N^m$, qui est un polynôme matriciel en k de degré $p-1$. Dans ces conditions, lorsque $k \rightarrow \infty$:

- $\|x_k\|$ reste borné si $p = 1$;
- $\|x_k\| \rightarrow +\infty$ si $p > 1$

Dans les 2 cas, le système réduit à E_i est :

- **stable** (mais pas asymptotiquement stable) si $p = 1$;
- **instable** si $p > 1$.

• **Trajectoires dans $E_i \subset E_u$**

a) $|\lambda| > 1$ $\dim E_i = p$: pour tout $x_0 \in E_i - \{0\}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|J^k x_0\| = +\infty$

b) $\rho > 1$ $\dim E_i = 2p$: pour tout $x_0 \in E_i - \{0\}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|K^k x_0\| = +\infty$

Dans les 2 cas, l'équilibre 0 du système réduit à E_i est **instable**.

Théorème général de stabilité des systèmes linéaires à temps discret

A étant un endomorphisme quelconque réel de $\mathbb{R}^n$, la restriction du système linéaire à temps discret $x_{k+1} = A \cdot x_k$ à son sous-espace :

- stable E_s est • **asymptotiquement stable**
- central E_c est • **simplement stable** si elle est semi-simple
- **instable** si elle n'est pas semi-simple
- instable E_u est • **instable**

Nous avons donc un énoncé analogue à celui obtenu pour les systèmes linéaires à temps continu.

10.3.3 Stabilité des équilibres d'un système non-linéaire

a) Cas unidimensionnel : $n = 1$. Soit x_0 un équilibre. Nous allons établir une condition de stabilité dans le cas d'un système réel. Supposons le système de classe C^1 , et faisons l'hypothèse $|f'(x_0)| < 1$.

Comme f est dérivable en x_0 , on a $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} = |f'(x_0)|$. Pour tout nombre $r > 0$ compris strictement entre $|f'(x_0)|$ et 1, $] - \infty, r[$ est un voisinage de $|f'(x_0)|$. Donc, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$|x - x_0| \in]0, \eta[\Rightarrow \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} = \frac{|f(x) - x_0|}{|x - x_0|} < r, \text{ d'où } |f(x) - x_0| < r |x - x_0|$$

$$|f(x) - x_0| \in]0, \eta[\Rightarrow \frac{|f^2(x) - f(x_0)|}{|f(x) - x_0|} = \frac{|f^2(x) - x_0|}{|f(x) - x_0|} < r, \text{ d'où } |f^2(x) - x_0| < r^2 |x - x_0|$$

Par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}^*, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f^k(x) - x_0| \leq r^k |x - x_0|$

La convergence exponentielle de $f^k(x)$ vers x_0 montre que x_0 est un équilibre stable et attractif, donc asymptotiquement stable.

On montre de même que si $|f'(x_0)| > 1$, l'équilibre est instable et répulsif.

En conclusion :

$|f'(x_0)| < 1 \Rightarrow x_0 \text{ est attractif stable.}$
 $|f'(x_0)| > 1 \Rightarrow x_0 \text{ est répulsif instable.}$

Dans le cas où $f'(x_0) = 0$, l'équilibre est dit **superstable** ou **super-attractif**.

Si $|f'(x_0)| = 1$, c'est-à-dire si $f'(x_0) = \pm 1$, l'équilibre est dit **indifférent**. Les divers cas de stabilité sont alors possibles. Par exemple, $x_0 = 0$ est :

- stable non attractif pour $f(x) = x$;
- attractif stable pour $f(x) = x - x^3$;
- instable non répulsif pour $f(x) = x + x^2$;
- répulsif instable pour $f(x) = x + x^3$.

Les vérifications correspondantes sont aisées avec le *diagramme itératif* objet du paragraphe suivant.

10.3.4 Le diagramme itératif

Dans le cas unidimensionnel, on peut illustrer concrètement le comportement de l'état par un **diagramme itératif** : x est porté en abscisse, et l'on trace les graphes des fonctions $x \mapsto f(x)$ et $x \mapsto x$ (1^{re} bissectrice). L'intersection des graphes fournit les équilibres.

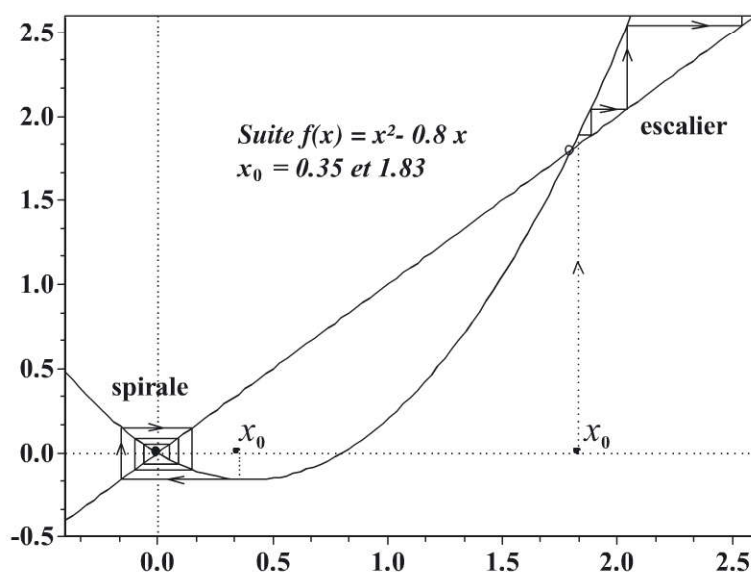


Figure 10.2 - Diagramme itératif.

Au voisinage de l'équilibre 0 : convergence en spirale ;
au voisinage de l'équilibre 1,8 : divergence en escalier

x étant un équilibre, si $f'(x) < 0$, on a un schéma (convergent ou divergent) en **spirale**, dit encore en **escargot**. C'est le cas de l'équilibre 0 sur la figure 10.2. Si $f'(x) > 0$, on a un schéma (convergent ou divergent) en **escalier**. C'est le cas de l'équilibre 1,8 sur la figure.

b) Cas multidimensionnel : n quelconque. Pour la généralisation à $\mathbb{R}^n$, la différentielle ∇f (endomorphisme de $\mathbb{R}^n$) se substituera à la dérivée f' . C'est le spectre de ∇f qui importe, et plus précisément les modules des valeurs propres.

10.4 *m*-CYCLES

10.4.1 Définition et propriétés élémentaires

La notion de *m*-cycle est spécifique aux systèmes à temps discret.

Par définition, un ***m*-cycle** est un *m*-uplet $(x_0, x_1, \dots, x_{m-1})$ tel que pour tout $k \in \{1, 2, \dots, m-1\}$, on ait $f(x_{k-1}) = x_k$ et $f(x_{m-1}) = x_m = x_0$; *m* étant le plus petit entier supérieur à 1 possédant cette propriété. On dira que tout point du cycle est ***m*-périodique**. En temps continu, l'analogue est une orbite périodique, le rôle de la longueur *m* du cycle étant alors joué par la période *T*.

Exemples

1. Pour $\Omega = \mathbb{R}^n$ et $f(x) = -x$, tout couple $(x, -x)$ avec $x \neq 0$ est un 2-cycle.
2. Dans $\Omega = \mathbb{R}^2$ euclidien, si $f(x)$ est le transformé de x dans une rotation de centre 0 et d'angle $\pi/2$, tout point non nul est 4-périodique.
3. Dans $\Omega = \mathbb{R}^2$ euclidien, si $f(x)$ est le transformé de x dans une rotation de centre 0 et d'angle 1 radian, il n'existe aucun cycle.

Remarques

1. Dans un *m*-cycle, tous les points jouent le même rôle. La numérotation $x_0, \dots, x_{m-1}$ de la définition n'implique pas qu'il y ait intrinsèquement un premier et un dernier éléments : chaque x_k pourrait jouer le rôle de x_0 .
2. Un équilibre x_0 est un 1-cycle... appellation dénuée d'intérêt donc inusitée. Comme nous l'avons signalé, on limite l'appellation de *m*-cycle au cas $m > 1$.
3. Un *m*-cycle, en tant qu'ensemble de points, est une orbite. Mais une orbite peut avoir un *m*-cycle comme partie propre : par exemple, pour le système $f(x) = x^2 - 4x + 5$ sur $\Omega = \mathbb{R}$, le 2-cycle $(1, 2)$ est inclus **strictement** dans l'orbite de 3, qui est $\{1, 2, 3\}$. On a le schéma symbolique : $3 \rightarrow 2 \Leftrightarrow 1$
 - En temps discret, un *m*-cycle peut accueillir les descendants d'un élément étranger au cycle : il n'y a pas de « loi anti-immigration »;
 - En temps continu, une orbite périodique ne peut pas accueillir les descendants d'un élément étranger au cycle : il y a une loi anti-immigration, qui n'est autre que le théorème de Cauchy-Lipschitz.

10.4.2 Stabilité des *m*-cycles

Notons f^j la composée (et non le produit) de *j* fois la fonction *f* ; $f^j = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{j \text{ fois}}$.

Soit x_0 un élément d'un *m*-cycle. Alors, $x_m = x_0$, et x_0 est un équilibre du système $x_{k+1} = g(x_k)$, où $g(x) = f^m(x)$. On dira que le *m*-cycle est **stable** (resp. instable, attractif, répulsif) si l'équilibre x_0 du système $x_{k+1} = g(x_k)$ est stable (resp. instable, attractif, répulsif).

On vérifie sans difficulté que ces définitions ne dépendent pas de l'élément du cycle choisi : x_0 ne jouit pas d'un statut particulier.

a) Stabilité des m -cycles d'un système linéaire

Un exemple élémentaire va nous montrer que, si x_0 est un élément d'un m -cycle, alors au bout de m pas de temps, l'état initial $x_0 + h$ peut :

- soit se rapprocher de x_0 ;
- soit rester à égale distance de x_0 ;
- soit s'éloigner de x_0 ,

ceci selon la direction de h , ce qui ne nous étonnera pas car nous savons déjà qu'en temps continu ou discret, un écart à l'équilibre peut, selon sa direction dans $\mathbb{R}^n$, se réduire ou s'amplifier au cours du temps.

$$\text{Soit donc } x \in \mathbb{R}^3, \text{ et le système } x_{k+1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} x_k$$

Nous représenterons ci-après les vecteurs en ligne, pour en faciliter l'écriture.

De façon évidente, $[x_0 = (1, 0, 0), x_1 = (-1, 0, 0)]$ constitue un **2-cycle**. Alors :

- $\forall a \in \mathbb{R}, f^2[x_0 + (a, 0, 0)] = x_0 + (a, 0, 0)$: lors d'un cycle, la distance à x_0 n'a pas changé.
- $\forall a \in \mathbb{R}, f^2[x_0 + (0, a, 0)] = x_0 + (0, 4a, 0)$: lors d'un cycle, la distance à x_0 a été multipliée par 4.
- $\forall a \in \mathbb{R}, f^2[x_0 + (0, 0, a)] = x_0 + (0, 0, a/9)$: lors d'un cycle, la distance à x_0 a été divisée par 9.

Cet exemple de dimension 3 est à rapprocher de l'exemple que la figure 7.9 nous a offert en dimension 2 en temps continu. Il illustre le rôle sous-jacent des variétés remarquables (voir aussi le § 10.6).

Revenons au cas général :

$$\text{Nous avons } f^m(x_0 + h) - x_0 = A^m(x_0 + h) - x_0 = \underbrace{A^m x_0}_{= x_0} + A^m h - x_0 = A^m h.$$

Ce résultat simple permet de lier la stabilité du cycle à celle de x_0 en tant qu'équilibre du système f^m , donc aux propriétés spectrales de A^m , donc finalement à celles de A .

b) Stabilité des m -cycles d'un système non-linéaire**Cas unidimensionnel : $n = 1$**

x_0 étant un point quelconque de Ω , montrons par récurrence que :

$$\text{Pour tout } j \in \mathbb{N}^*, \text{ on a } (f^j)'(x_0) = f'(x_0) f'(x_1) \dots f'(x_{j-1}) (*)$$

Ceci est vrai pour $j = 1$. Supposons (*) vérifié au rang j , pour tout $x_0 \in \Omega$.

$$\begin{aligned} \text{Alors, } (f^{j+1})'(x_0) &= (f^j \circ f)'(x_0) = (f^j)'[f(x_0)] \cdot f'(x_0) \\ &= (f^j)'(x_1) \cdot f'(x_0) = f'(x_0) f'(x_1) \dots f'(x_j) \end{aligned}$$

(*) se trouve ainsi vérifié au rang $j + 1$, ce qui valide la proposition :

$$\boxed{\forall j \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x_0 \in \Omega, \quad (f^j)'(x_0) = f'(x_0) f'(x_1) \dots f'(x_{j-1})}$$

Soit maintenant $(x_0, x_1, \dots, x_{m-1})$ un m -cycle.

Intéressons-nous au système $\Sigma : \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_k)$, où $g(x) = f^m(x)$.

Appliquant la proposition ci-dessus à $k = m$, il vient :

$$g'(x_0) = (f^m)'(x_0) = f'(x_0) f'(x_1) \dots f'(x_{m-1}).$$

Comme $(x_0, x_1, \dots, x_{m-1})$ est un m -cycle, l'application de la même formule à tout x_k donnera, à l'ordre près des facteurs, le même second membre : ce réel est appelé **multiplicateur** du cycle.

Par conséquent : $g'(x_0) = g'(x_1) = \dots = g'(x_{m-1}) = f'(x_0) f'(x_1) \dots f'(x_{m-1})$.
Compte tenu du résultat établi au § 10.3.3 :

- si $|f'(x_0) f'(x_1) \dots f'(x_{m-1})| < 1$, les m points x_k sont stables et attractifs pour Σ , donc asymptotiquement stables. Comme indiqué en tête de ce paragraphe, ces qualificatifs s'appliquent au cycle.
On retiendra en particulier que le cycle est **attractif**.
- si $|f'(x_0) f'(x_1) \dots f'(x_{m-1})| > 1$, les m points x_k sont instables et répulsifs pour Σ , qualificatifs que partage le cycle.
On retiendra en particulier que le cycle est **répulsif**.
- Si le multiplicateur vaut ± 1 , on peut, à l'image de ce que nous avons fait au § 10.3.3 pour les équilibres, bâtir des exemples montrant que le cycle peut être de diverses natures : attractif, répulsif, ... On retiendra son caractère **indéterminé a priori**.

Cas multidimensionnel : n quelconque

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un élément d'un m -cycle du système $x_{k+1} = f(x_k)$, avec f de classe C^1 . Nous notons toujours $g(x) = f^m(x)$. Donnons à x_0 un accroissement vectoriel $u \in \mathbb{R}^n$. En nous limitant au premier ordre en u :

- $f(x_0 + u) - f(x_0)$ vaut $\nabla f_{x_0}(u)$.
- $f^2(x_0 + u) - f^2(x_0)$ vaut $\nabla f_{x_1}(\nabla f_{x_0}(u))$ (dérivation d'une fonction composée)
- $g(x_0 + u) - g(x_0) = f^m(x_0 + u) - f^m(x_0) = f^m(x_0 + u) - x_0$ vaut, toujours au premier ordre :

$$\nabla f_{x_{m-1}}(\dots(\nabla f_{x_1}(\nabla f_{x_0}))) (u) = (\nabla f_{x_{m-1}} \circ \dots \circ \nabla f_{x_1} \circ \nabla f_{x_0})(u)$$

Il s'agit d'identifier si cette dernière valeur implique ou non que $f^m(x_0 + u)$ est plus proche de x_0 que $x_0 + u$. Tout dépend donc du rapport des deux éloignements :

$$r(x_0, u) = \frac{1}{\|u\|} \|(\nabla f_{x_{m-1}} \circ \dots \circ \nabla f_{x_1} \circ \nabla f_{x_0})(u)\|$$

- si $\forall u \in \mathbb{R}^{n*} |r(x_0, u)| < 1$, le cycle est **stable et attractif**.
- si $\exists u \in \mathbb{R}^{n*}$ tel que $|r(x_0, u)| > 1$, le cycle est **instable**.
- si $\forall u \in \mathbb{R}^{n*} |r(x_0, u)| > 1$, le cycle est **instable et répulsif**.

Notons que $r(x_0, u)$ ne dépend que de la direction de u et que l'on peut donc limiter la définition au cas $\|u\| = 1$, ce qui simplifie l'expression de $r(x_0, u)$.

Exercice 10.2 Équilibres et 3-cycle

Soient les fonctions réelles $x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} f_1(x) = 2x + 1 \\ f_2(x) = -2x + 4 \end{cases}$. On définit le système à temps discret S_D par $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$ avec $f = \min(f_1, f_2)$.

1. Déterminer les équilibres du système.
2. Montrer que pour $x \in I = \left[-\frac{1}{8}, \frac{5}{16}\right]$, on a $f^3(x) = 8x$, en notant f^3 la fonction composée $f \circ f \circ f$.
3. En déduire un équilibre du système Σ défini par $x_{n+1} = f^3(x_n)$, puis pour S_D l'existence d'un 3-cycle que l'on déterminera.
4. Montrer que le 3-cycle identifié en question précédente est instable et répulsif.

10.5 EXPOSANT DE LIAPOUNOV

a) Cas unidimensionnel : $n = 1$

Soit un m -cycle $(x_0, \dots, x_{m-1})$. Nous gardons la notation $g = f^m = f^{\circ m}$. D'après ce qui précède, x proche de x_k s'en éloigne au bout d'un « tour », c'est-à-dire après m pas de temps, d'un facteur équivalent (s'il est non-nul) à $|g'(x_k)| = |f'(x_0)| \dots |f'(x_{m-1})|$. Ce facteur est donc une mesure de la vitesse de convergence (si le cycle est attractif) ou de divergence (s'il est répulsif) de la trajectoire. La moyenne géométrique des valeurs absolues des m facteurs du produit est :

$$L(x_k) = |g'(x_k)|^{1/m} = |f'(x_0) f'(x_1) \dots f'(x_{m-1})|^{1/m}.$$

On l'appelle **nombre de Liapounov** du cycle.

On définit pour $g'(x_k) \neq 0$ l'**exposant de Liapounov** du m -cycle par :

$$h(x_0) = \ln[L(x_k)] = (1/m) \ln(|f'(x_0) \dots f'(x_{m-1})|)$$

• **Généralisation aux orbites** : ces définitions en appellent de plus générales pour une orbite quelconque, pas nécessairement périodique :

– le nombre de Liapounov de l'orbite $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ est, si cette limite existe :

$$L(x_0) = \lim_{m \rightarrow \infty} |f'(x_0) f'(x_1) \dots f'(x_{m-1})|^{1/m}.$$

– l'exposant de Liapounov de l'orbite $Orb[x_0]$ est :

$$h(x_0) = \lim_{m \rightarrow \infty} (1/m) \ln(|f'(x_0) \dots f'(x_{m-1})|)$$

h existe si et seulement si L existe et est non nul. On a dans ce cas

$$h(x_0) = \ln[L(x_0)]$$

Remarques

1. Voici un exemple de non-existence du nombre de Liapounov d'une orbite : $f(x) = 2^x$ sur $\Omega = \mathbb{R}_+^*$ (le rapport tend vers l'infini si $x > 1$).
2. $L(x_0)$ ne dépend pas du point de l'orbite choisi. On pourrait donc, bien que ce ne soit pas l'usage, le noter $L[Orb(x_0)]$. La même remarque vaut pour $h(x_0)$.
3. Nous avons vu que, contrairement au cas d'un système à temps continu, deux orbites distinctes peuvent se couper. Si deux orbites ont une intersection non vide, elles ont le même nombre de Liapounov.
4. Pour le système géométrique $f(x) = ax$ défini sur $\Omega = \mathbb{R}_+^*$:
 - le flot est $x_n = a^n x_0$. On a $L(x_0) = (|a|^n)^{1/n} = |a|$
 - l'exposant de Liapounov est $h(x_0) = \ln[L(x_0)] = \ln|a|$.

b) Cas multidimensionnel : n quelconque

Soit un m -cycle $(x_0, \dots, x_{m-1})$. Nous avons défini plus haut le nombre $r(x_0, u)$ qui, pour $\|u\| = 1$, s'exprime :

$$r(x_0, u) = \|(\nabla f_{x_{m-1}} \circ \dots \circ \nabla f_{x_1} \circ \nabla f_{x_0})(u)\|$$

Nous généralisons la définition (cas unidimensionnel) de $L(x_k)$ en posant :

$L(x_0, u) = |r(x_0, u)|^{1/m}$, **nombre de Liapounov** du cycle, associé au couple (x_0, u) .

Il s'agit effectivement d'une généralisation au cas multidimensionnel.

Car $f'(x_j)$ ($n = 1$) est un cas particulier de $\nabla f_{x_j}(u)$ (n quelconque).

L'exposant de Liapounov du cycle est :

$$h(x_0, u) = \ln L(x_0, u) = (1/m) \ln |r(x_0, u)|. \text{ Il dépend de } u.$$

Soulignons que $L(x_i, u)$ et $h(x_i, u)$ ne dépendent pas du représentant x_i d'un m -cycle donné.

• **Généralisation aux orbites** : ces définitions en appellent de plus générales pour une orbite quelconque, pas nécessairement périodique.

– le nombre de Liapounov associé à l'orbite $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ de x_0 et au vecteur unitaire u est, si cette limite existe :

$$L(x_0, u) = \lim_{m \rightarrow \infty} \{ \|(\nabla f_{x_{m-1}} \circ \dots \circ \nabla f_{x_1} \circ \nabla f_{x_0})(u)\| \}^{1/m}$$

– l'exposant de Liapounov de l'orbite $Orb[x_0]$ est alors, pour u unitaire :

$$h(x_0, u) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \ln \|(\nabla f_{x_{m-1}} \circ \dots \circ \nabla f_{x_1} \circ \nabla f_{x_0})(u)\|$$

On n'affecte pas le résultat si on substitue à x_0 un élément x_i quelconque de son orbite.

Nous retrouverons le nombre et l'exposant de Liapounov au chapitre suivant, à l'occasion de la définition du chaos.

10.6 AUTRES NOTIONS

Nous pouvons introduire pour les systèmes à temps discret un certain nombre d'autres notions analogues à celles définies pour les systèmes à temps continu. En voici quelques exemples, la liste n'étant naturellement pas limitative :

– bassins d'attraction ou de répulsion : nous en trouverons quelques exemples lors de l'étude de l'application logistique au chapitre 12.

– variétés remarquables : par exemple, à l'équilibre 0 du système :

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}, \text{ la variété stable } V_s(0) \text{ est la droite } y = 0, \text{ la variété instable } V_u(0) \text{ la droite } x = 0.$$

– bifurcations : par exemple, l'apparition de m -cycles aura une importance particulière comme on le verra au chapitre 12.

A contrario, certaines propriétés des systèmes à temps continu n'ont pas d'équivalent en temps discret, par exemple :

- mort explosive : le caractère discret du temps ne permet pas de définir l'équivalent de $\lim_{t \rightarrow t_f} \|x(t)\| = +\infty$. Toutefois, l'horizon temporel peut être limité comme l'atteste l'exemple du système $x_{k+1} = \arcsin x_k$: on ne peut plus itérer si x_k dépasse la valeur 1.
- théorème de Cauchy-Lipschitz : ce théorème n'a pas d'équivalent en temps discret. Si l'unicité du futur devient évidente par $x_{k+1} = f(x_k)$, l'unicité du passé n'est pas garantie comme nous l'avons déjà vu.
- la suite montrera aussi que l'apparition du chaos exige une dimension d'au moins 3 en temps continu, mais peut se produire dès la dimension 1 en temps discret.

INTRODUCTION AU CHAOS EN TEMPS CONTINU



Ce chapitre introduit la notion de chaos en montrant que le comportement à long terme d'une trajectoire d'un système à temps continu :

- peut être classé en un petit nombre de catégories, et décrit dans des termes assez simples, si sa dimension est 1 ou 2. Les comportements-types sont recensés par le théorème de Poincaré-Bendixson ;
- peut présenter d'autres comportements si la dimension du système est d'au moins 3. Pour certains de ces nouveaux comportements, on parle de chaos.

Outre les notions définies dans les chapitres précédents, l'introduction à la notion de chaos nécessite aussi de connaître la notion de fractale, qui fait l'objet de l'annexe 6.

Intermède historique : l'erreur de Poincaré

Passionné de mathématiques et d'astronomie, le roi Oscar de Norvège et de Suède offre en 1889 un prix de 2500 couronnes à l'auteur d'une « découverte importante dans le domaine de l'analyse mathématique supérieure ». Le mémoire de Poincaré sur le problème des 3 corps (trois masses ponctuelles mues exclusivement par leurs interactions gravitationnelles, selon la loi de Newton) lui vaut l'admiration du jury, au sein duquel siègent Weierstrass et Hermite. Il reçoit le prix... mais le jeune Phrægmen, relecteur au service de l'imprimeur, détecte une erreur. Beau joueur, Poincaré non seulement assure les frais de réimpression, mais retourne à son avantage l'égratignure légitime du modeste Phrægmen en corrigeant et approfondissant son travail initial. Sa profondeur d'analyse lui permet ainsi une première et fructueuse ouverture vers la théorie du chaos.

11.1 ENSEMBLES-LIMITES EN DIMENSION 2

Le but de cette section est de préparer la suivante, consacrée au théorème de Poincaré-Bendixson : ce théorème donne une classification des orbites d'un système bidimensionnel. Il est donc de nature qualitative. Son importance provient de celle des systèmes bidimensionnels, et son originalité réside dans le fait qu'il est *spécifique à la dimension 2*. On ne trouve nul analogue sur $\mathbb{R}^n$ si $n \neq 2$. Nous allons ici cheminer à travers les ensembles-limites du plan, en six étapes dont chacune est typique des raisonnements qualitatifs classiques dans l'étude des systèmes dynamiques.

Le détail des étapes successives contient des fragments de raisonnement intéressants en eux-mêmes et qui seront réutilisables pour résoudre d'autres problèmes. Néanmoins, on pourra en première lecture consulter directement l'énoncé des lemmes clôturant chacune des étapes, puis aborder la section suivante, qui traite du théorème de Poincaré-Bendixson.

Hypothèses pour les sections 11.1 et 11.2

Le système $\dot{x} = f(x)$, avec $x \in \Omega$, domaine de $\mathbb{R}^2$, est tel que :

- f est de classe C^1 ;
- l'ensemble $\mathcal{E}$ des équilibres ne comporte que des points isolés.

On utilise dans ce qui suit des intuitions de géométrie plane (par exemple : une courbe fermée pourvue de propriétés convenables délimite un intérieur et un extérieur dis-joints) tout à fait justifiées, mais dont la validation rigoureuse *ex nihilo* exigerait quelques développements complémentaires.

Étape 1 : lemme du δ -losange

Soit u un point régulier, c'est-à-dire tel que $f(u) \neq 0$. Soit $\mathcal{B}$ la boule ouverte de centre $f(u)$ et de rayon $\frac{1}{2}\|f(u)\|$. Comme f est continue, il existe un disque ouvert $V(u)$ de centre u tel que $x \in V(u) \implies f(x) \in \mathcal{B}$.

Soit alors L un intervalle ouvert (segment du plan privé de ses extrémités) :

- centré sur u ;
- orthogonal à $f(u)$;
- inclus dans $V(u)$; on appelle δ sa demi-longueur.

La troisième propriété exclut un éventuel phénomène de « retour » illustré par ce portrait de phases.

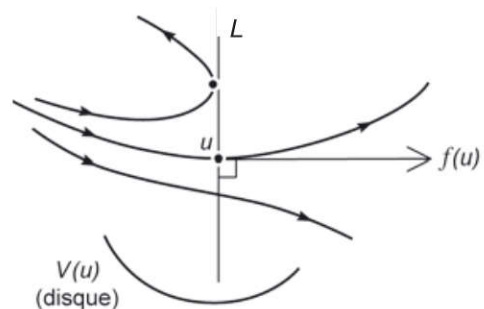


Figure 11.1 - Un retour interdit.

L'absence de retour implique que « toute trajectoire assez proche de L coupe L », comme le précisera le premier lemme.

• Le δ -losange

Appelons δ -losange $D_\delta(u)$ l'intérieur du carré dont L , de longueur 2δ , est une diagonale. Nous sacrifions à l'appellation familière de losange pour tout carré présenté avec une diagonale verticale.

Choisissons dans $E = \mathbb{R}^2$ un repère euclidien déduit par rotation du repère initial, tel que $u = (0, 0)$ et $f(u) = (a, 0)$ avec $a > 0$. Alors, pour tout $z \in D_\delta(u)$, l'angle $(f(u), f(z))$ appartient à $] -\pi/6, +\pi/6 [$, ceci parce que $f(z) \in \mathcal{B}$.

Notant $f(z) = \begin{pmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \end{pmatrix}$, on a $f_1(z) > a/2$.

Soit $z_0 \in D_\delta(u)$. La vitesse horizontale de l'état $z(t) = \phi(t, z_0)$ est supérieure à $a/2$. Or, $D_\delta(u)$ est inclus dans une bande verticale de largeur 2δ finie. Donc, il est traversé par l'état $z(t)$ en un temps fini.

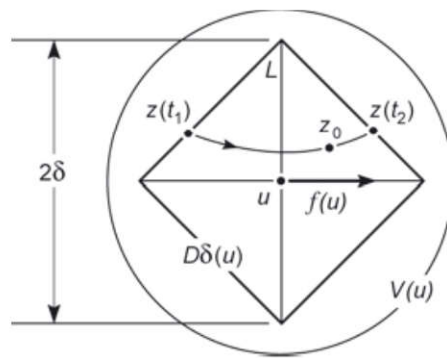


Figure 11.2 - Le δ -losange.

Appelons :

- t_1 le plus grand instant négatif pour lequel l'orbite de z_0 coupe la frontière de $D_\delta(u)$; compte tenu de l'orientation de $f(z)$, ce ne peut être que la frontière gauche de $D_\delta(u)$, c'est-à-dire la réunion en forme de « < » de ses deux segments d'abscisse négative ou nulle ;
- t_2 le plus petit instant positif pour lequel l'orbite de z_0 coupe la frontière $D_\delta(u)$; compte tenu de l'orientation de $f(z)$, ce ne peut être que la frontière droite de $D_\delta(u)$, c'est-à-dire la réunion en forme de « > » de ses deux segments d'abscisse positive ou nulle.

Comme le fragment d'orbite $\{z(t) ; t_1 < t < t_2\}$ est contenu dans $D_\delta(u)$, il rencontre nécessairement L . En résumé, on a le lemme :

Lemme 1 (lemme du δ -losange)

Pour tout $z_0 \in D_\delta(u)$, il existe un fragment d'orbite :

- contenant z_0 ;
- contenu dans l'ouvert $D_\delta(u)$;
- coupant L .

Étape 2 : lemme de monotonie, ou lemme du piège

Ce lemme établit le fait que les points d'intersection d'une trajectoire avec L ont des ordonnées... ordonnées, ce qui signifie qu'elles sont une fonction monotone des temps correspondants.

Soient t_1 , t_2 et t_3 trois instants (attention, ce ne sont pas les t_i de l'étape 1) vérifiant :

- * $t_1 < t_2 < t_3$;
- * $z(t_1)$, $z(t_2)$ et $z(t_3) \in L$, tous trois distincts.

Il y a qualitativement deux cas, correspondant aux schémas :



Figure 11.3 - Deux cas de retour sur L .

Soit C' l'élément d'orbite $\{z(t) ; t \in [t_1, t_2]\}$ et L' l'intervalle vertical ouvert d'extrémités $z(t_1)$ et $z(t_2)$. Leur réunion forme une courbe fermée $C = L' \cup C'$. Intéressons-nous au devenir au-delà de t_2 de la trajectoire $z(t)$ empruntant C' :

- dans le cas 1, $z(t)$ pénètre à l'intérieur de C en t_2 ;
- dans le cas 2, $z(t)$ débouche à l'extérieur de C en t_2 .

Nous retiendrons sans perte de généralité le **cas 1**, car le cas 2 s'y ramène par inversion du temps.

Si $z(t)$ quitte l'intérieur de C à un instant t_3 supérieur à t_2 , il le fait en traversant sa frontière C :

- soit par le segment L' : c'est impossible, car il ne pourrait le faire que par une traversée de droite à gauche, ce qui serait contradictoire avec l'orientation de $f(z)$ vers la droite ;

- soit par la courbe C' : c'est encore impossible, car ceci ne s'accorderait pas avec l'unicité de la solution.

Donc, au-delà de t_2 , la trajectoire empruntant C' reste confinée à l'intérieur de C . Elle ne saurait par conséquent couper L , pour $t > t_2$, qu'en-dessous de $z(t_2)$, comme le montre la figure 11.4.

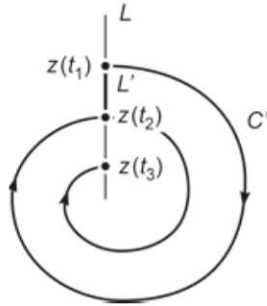


Figure 11.4 – Monotonie des rencontres avec L .

Ce résultat s'exprime par le lemme :

Lemme 2 (lemme de monotonie)

Si une trajectoire coupe L en trois instants $t_1 < t_2 < t_3$, ceci en trois points distincts $z(t_i)$, alors : $z(t_2)$ est entre $z(t_1)$ et $z(t_3)$.

Nous avons fait l'hypothèse de $z(t_i)$ distincts. En dehors de cette hypothèse, on trouve le cas d'une orbite périodique, pour laquelle on a $z(t_1) = z(t_2) = z(t_3)$.

Étape 3 : ensemble-limite au voisinage d'un point régulier

Nous allons montrer qu'au voisinage d'un point régulier, $\omega(z_0)$ est localement un fragment d'orbite. Soit donc u , point régulier de $\omega(z_0)$. D'après ce qui précède, il existe un δ -losange $D_\delta(u)$ centré en u et un fragment de trajectoire T_u contenant u et traversant $D_\delta(u)$, au sens indiqué antérieurement.

Soit $z \in \omega(z_0) \cap D_\delta(u)$ (figure 11.5). Il existe un fragment de trajectoire T_z contenant z , traversant $D_\delta(u)$ et coupant L , diagonale verticale de $D_\delta(u)$, en z_L .

Si $u \neq z_L$, il existe deux ε -losanges disjoints D_1 et D_2 centrés en u et z_L , et inclus dans $D_\delta(u)$.

$$\left. \begin{array}{l} z \in \omega(z_0) \\ z_L \in Orb(z) \end{array} \right\} \Rightarrow z_L \in \omega(z_0) \text{ par invariance d'un ensemble-limite par le flot.}$$

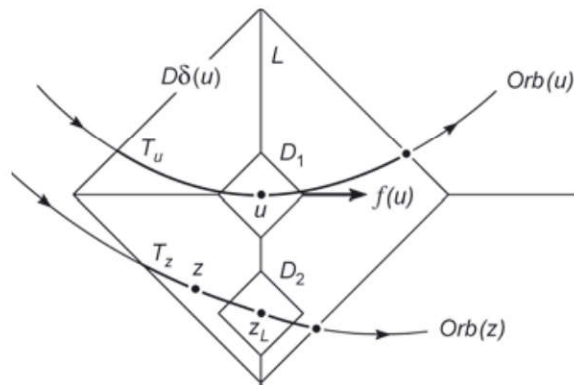


Figure 11.5 - Fragment d'orbite près de u .

Par conséquent, D_1 et D_2 , donc aussi L , sont traversés par la trajectoire $\phi(t, z_0)$ pour $t \geq 0$ en des instants arbitrairement grands. Soit t_1 un temps de traversée de $L \cap D_1$, et $t_2 > t_1$ un temps de traversée de $L \cap D_2$. Alors, il existe un temps $t_3 > t_2$ de traversée de $L \cap D_1$, ce qui contredit le lemme de monotonie. Abandonnant donc l'hypothèse $u \neq z_L$, on a nécessairement $u = z_L$, ce qui implique $z \in T_u$. Les deux orbites figurées $Orb(u)$ et $Orb(z)$ sont donc confondues.

Lemme 3

Si u est un point régulier d'un ensemble limite, ce dernier coïncide dans un voisinage de u avec un fragment d'orbite.

Hors des points d'équilibre, un ensemble-limite peut donc être fléché, comme l'est la trajectoire localement confondue.

L'exemple du portrait de phases suivant montre que dans certains cas, un ensemble-limite, en l'occurrence $\omega(z_0) = [a, b]$ ne peut pas être fléché. Mais dans cet exemple, nous n'avons pas observé l'hypothèse d'équilibres isolés faite dans ce paragraphe.

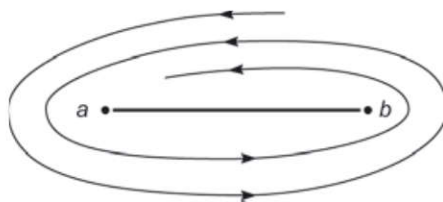


Figure 11.6 - Un ensemble-limite non fléchable.

Exercice 11.1 Rencontre orbite – section transverse

Soit z_0 un point régulier du système $\dot{z} = f(z)$, avec $z \in \mathbb{R}^2$ et f continue.

Les coordonnées x et y du plan sont choisies de telle façon que $z_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $f'(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Soit L un segment ouvert vertical contenant 0, ne portant aucun équilibre et n'étant en aucun point parallèle au flot. On l'appelle pour cela **section transverse**.

Montrer que si l'orbite de z_0 coupe L aux temps t_1 et t_2 , alors elle ne coupe L qu'un nombre fini de fois entre t_1 et $t_2 > t_1$.

Étape 4 : cas d'un point qui appartient à son ensemble limite

Supposons que $z_0 \in \omega(z_0)$, z_0 étant un point **régulier**. D'après ce qui précède, $\phi(t, z_0)$ visite pour $t \geq 0$ une infinité de fois le losange $D_\delta(z_0)$, et traverse L chaque fois. Donc, partant de z_0 à $t = 0$, la trajectoire recoupe L à $t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots$, avec $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$ (le fait de pouvoir ordonner ainsi les temps t_i d'intersection est justifié par l'exercice 11.1). Or, $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t_n, z_0) = z_0$. Comme $\phi(t_n, z_0)$ est monotone sur L , on a nécessairement $\forall n \in \mathbb{N}^*, \phi(t_n, z_0) = z_0$: la trajectoire est périodique de période $t_2 - t_1$.

Si maintenant z_0 est un **équilibre**, son ensemble limite se réduit naturellement à un point : $\omega(z_0) = z_0$.

Résumons :

Lemme 4

Si z_0 appartient à son ensemble limite, alors :

- ou bien z_0 est un point régulier, et son orbite est alors périodique ;
- ou bien z_0 est un équilibre.

Remarques

1. On déduit de ce résultat que si z_0 n'est ni un équilibre ni un point d'une orbite périodique, il n'appartient pas à son ensemble-limite. Observons que cette remarque inclut le cas où $\omega(z_0)$ est l'ensemble vide.
2. Nous rencontrerons au § 11.3.1 (deuxième exemple) le flot irrationnel sur le tore, qui déroge au lemme 4 ; ce dernier devient donc invalide dès la dimension 3, et même en dimension 2 avec une topologie autre que celle de $\mathbb{R}^2$.

Étape 5 : les points réguliers de $\omega(u)$ avec $u \in \omega(z_0)$

Soit z un point régulier de $\omega(u)$, avec $u \in \omega(z_0)$; u est nécessairement régulier (sinon, $\omega(u) = u$, équilibre).

- Par transitivité : $u \in \omega(z_0)$ et $z \in \omega(u) \implies z \in \omega(z_0)$.
- Par invariance des ensembles-limites : $u \in \omega(z_0) \implies \text{Orb}(u) \subset \omega(z_0)$.
- D'après le lemme 3 :

$$\left. \begin{array}{l} z \in \omega(z_0) \\ z \text{ régulier} \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} \omega(z_0) \cap D_\delta(z) \text{ est un fragment d'orbite } S_z \\ \text{traversant } D_\delta(z) \end{array} \right.$$

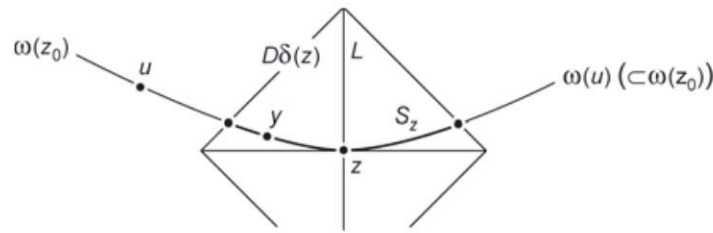


Figure 11.7 - z , point régulier de $\omega(u)$.

$z \in \omega(u)$ implique l'existence de points de $\text{Orb}(u)$ arbitrairement proches de z .

Il en existe donc qui appartiennent à $D_\delta(z)$. Soit y un tel point. Il est régulier, car élément de $\text{Orb}(u)$ avec u régulier. Comme $\text{Orb}(u) \subset \omega(z_0)$:

$$\begin{aligned} y \in \text{Orb}(u) \cap D_\delta(z) &\implies y \in \omega(z_0) \cap D_\delta(z) \\ &\implies y \in S_z \text{ (d'après le lemme 3)} \implies y \in \text{Orb}(z) \end{aligned}$$

Donc, $\text{Orb}(u) \cap \text{Orb}(z) \neq \emptyset$, ce qui montre que $\text{Orb}(u) = \text{Orb}(z)$.

$$\left. \begin{array}{l} z \in \omega(u) \\ u \in \text{Orb}(z) \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} u \in \omega(u) \text{ car tout ensemble-limite est la réunion} \\ \text{des orbites de ses points (invariance).} \end{array} \right.$$

Il résulte du lemme 4 que $\text{Orb}(u)$ est une orbite périodique.

On retiendra :

Lemme 5

Si $u \in \omega(z_0)$ et si $\omega(u)$ contient un point régulier, alors $\text{Orb}(u)$ est périodique.

Dans ce résultat, il faut bien noter que u appartient à un ensemble-limite. Si ce n'est pas le cas, $\text{Orb}(u)$ n'a aucune raison d'être périodique, comme le montrent de nombreux exemples.

Étape 6 : si $\omega(z_0)$ contient un cycle, il coïncide avec lui

On se place dans le cas où $\text{Orb}^+(z_0)$ est borné. Alors, $\omega(z_0)$ est connexe (propriété de connexité des ensembles-limites). Soit Γ un cycle (orbite périodique) contenu dans $\omega(z_0)$, et soit $z \in \omega(z_0)$.

• *Hypothèse : $z \notin \Gamma$*

Étant un cycle, Γ est fermé. Par conséquent, la distance $d = d(z, \Gamma)$ de z à Γ est strictement positive ; $\omega(z_0)$ étant connexe et contenant Γ , on peut trouver une suite de points z_n de $\omega(z_0)$ hors de Γ et arbitrairement proches de Γ :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists z_n \in \omega(z_0) - \Gamma, \text{ avec } d(z_n, \Gamma) \leq d/n.$$

Le fragment d'orbite $Orb^+(z_0)$ étant borné, $\omega(z_0)$ l'est aussi, donc également la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Il en résulte que z_n a au moins un point d'accumulation u . Comme la distance de z_n à Γ tend vers 0, on a nécessairement $d(u, \Gamma) = 0$. Mais Γ , orbite périodique, est fermé. Donc, $u \in \Gamma$. Élément d'un cycle, u est régulier et il existe donc un δ -losange $D_\delta(u)$ centré sur u . Ce δ -losange contient un z_n , et on a donc le schéma suivant.

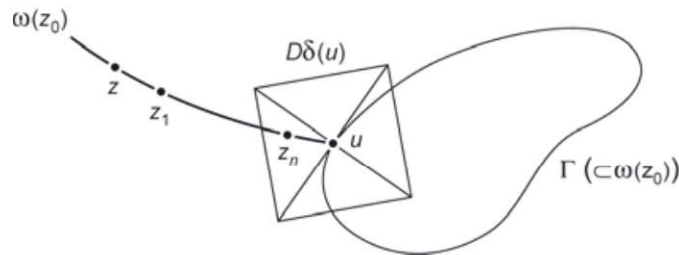


Figure 11.8 – L'orbite périodique Γ .

Ce schéma montre que $\omega(z_0) \cap D_\delta(u)$ n'est pas un fragment d'orbite de u , contrairement à ce qu'indique le lemme 3, ceci à cause de l'« intrus » z_n . Il y a contradiction, et on doit donc écarter l'hypothèse initiale $z \notin \Gamma$. Donc, $z \in \Gamma$, ce qu'on peut exprimer ainsi :

Lemme 6

Soit z_0 tel que $Orb^+(z_0)$ est borné.

Si $\omega(z_0)$ contient une orbite périodique, $\omega(z_0)$ *est* cette orbite périodique.

Remarquons que le portrait de phases suivant qui semble en premier examen déroger à ce résultat n'y déroge pas. En effet, le cercle Γ n'est pas une orbite périodique, en raison de la présence de l'équilibre a .

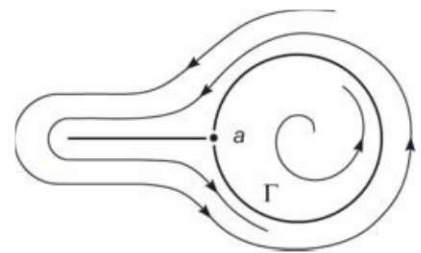


Figure 11.9 – Γ n'est pas une orbite.

11.2 THÉORÈME DE POINCARÉ-BENDIXSON

Les trois destins. Le théorème de Poincaré-Bendixson

Supposons $Orb^+(z_0)$ borné. Alors, on sait que $\omega(z_0)$ est non-vide et connexe. Il y a deux cas possibles.

- 1) $\omega(z_0)$ est constitué d'équilibres : alors, il est formé d'un équilibre unique car il est connexe et les équilibres sont isolés. Ceci constitue ce que nous appellerons le **destin du premier type**, ou destin n° 1.
- 2) $\omega(z_0)$ contient au moins un point régulier u : il y a alors deux possibilités :
 - a) $\omega(u)$ est constitué d'équilibres : mais d'après la propriété de transitivité, on a $\omega(u) \subset \omega(z_0)$. Comme $\omega(z_0)$ est borné, $\omega(u)$ l'est aussi. Ici, u jouant le rôle que jouait z_0 dans le cas 1, $\omega(u)$ se réduit à un équilibre. C'est le **destin du deuxième type**, ou destin n° 2.
 - b) si $\omega(u)$ contient z régulier, $Orb(u)$ est périodique d'après le lemme 5 ; $\omega(z_0)$ étant la réunion des orbites de ses points, $\omega(z_0)$ contient $Orb(u)$. Le lemme 6 impose alors $\omega(z_0) = Orb(u)$, ce qui est le **destin du troisième type**, ou destin n° 3.

La trajectoire de z_0 ne peut donc connaître que trois types de destins, traduits par la nature de $\omega(z_0)$. Cet ensemble-limite :

- ou bien est un équilibre du système ;
- ou bien contient un point régulier du système : chacun de ses points admet alors pour ensemble-limite un équilibre ;
- ou bien est une orbite périodique propre (non réduite à un point).

Si on abandonne l'hypothèse d'équilibres isolés, un raisonnement que nous ne détaillerons pas, mais qui est de même nature que ceux utilisés ci-avant, conduit à généraliser le premier destin : $\omega(z_0)$ n'est alors plus nécessairement un équilibre du système, mais un ensemble formé d'équilibres.

En résumé, nous obtenons l'important théorème suivant, qui permet de cataloguer les destins possibles d'une trajectoire en dimension 2 :

Théorème de Poincaré-Bendixson

Soit $\dot{x} = f(x)$ un système défini sur un domaine Ω de $\mathbb{R}^2$, et $z_0 \in \Omega$ tels que :

- f est de classe C^1 ;
- $Orb^+(z_0)$ est borné.

Alors, il existe exactement **trois** possibilités mutuellement exclusives pour l'ensemble-limite $\omega(z_0)$:

- $\omega(z_0)$ est formé d'équilibres du système ;
- $\omega(z_0)$ contient un point régulier du système, et chacun de ses points admet pour ensemble-limite un équilibre ;
- $\omega(z_0)$ est une orbite périodique propre (non réduite à un point).

Nous avons vu au paragraphe 7.1 que $Orb^+(x)$ borné implique $\omega(x)$ connexe. Ceci s'applique au point z_0 du théorème : dans chacun des trois destins, $\omega(z_0)$ est **connexe**.

Dans l'hypothèse d'équilibres isolés, le premier destin se précise ainsi : $\omega(z_0)$ est un équilibre du système.

Un exemple

Le portrait de phases de la figure 11.10 montre plusieurs équilibres, dont e_1 , e_2 et e_3 . Pour ce système :

- a connaît le destin n° 1 : $\omega(a) = e_1$, qui est un équilibre ; de même, pour tout équilibre e_i , on a $\omega(e_i) = e_i$;
- b connaît le destin n° 2 : $\omega(b) = \text{triangle curviligne } \Gamma_1$, qui n'est pas une orbite. Tout point de ce triangle a pour ensemble-limite un équilibre : e_1 ou e_2 ou e_3 ;
- c et d connaissent le destin n° 3 : $\omega(c) = \omega(d) = \text{cycle } \Gamma_2$, qui est une orbite périodique.

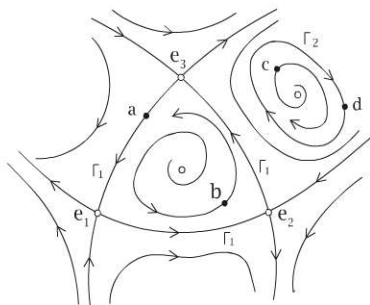


Figure 11.10 – Illustration des trois destins.

Un autre exemple

La trajectoire figurée dans le schéma suivant correspond au cas où les équilibres du système ne sont pas isolés. Le point z_0 connaît le destin n° 1 : il admet l'étoile $[a, b] \cup [a, c] \cup [a, d]$ comme ensemble-limite.

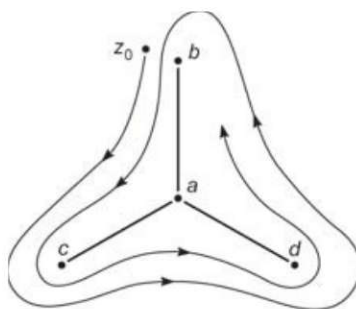


Figure 11.11 – une physionomie possible du 1^{er} destin.

11.3 INTRODUCTION AU CHAOS

La notion de chaos est intuitivement associée aux notions de désordre, de complexité et de turbulence. Aucun des trois destins assignés à une trajectoire par le théorème de Poincaré-Bendixson ne peut être qualifié de chaotique.

- On va dans un premier temps examiner deux exemples de dérogation au théorème de Poincaré-Bendixson ; les trajectoires correspondantes gardent néanmoins une définition géométrique simple.
- Ensuite (§ 11.3.2) nous donnerons une définition du chaos, qui correspond à des situations plus complexes.

11.3.1 Un quatrième destin non chaotique

Le théorème de Poincaré-Bendixson met en jeu un système de dimension 2 dans $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Pour sortir de ce contexte, il est nécessaire :

- soit, en gardant la dimension locale 2, de choisir une topologie globale de Ω différente de celle de $\mathbb{R}^2$. C'est précisément ce que nous avons fait au § 8.5 en considérant un flot hélicoïdal sur le tore. Le théorème de Poincaré-Bendixson ne s'applique alors pas. Mais l'expression de chacun des trois destins du théorème garde un sens en dimension et topologie globale quelconques, et le cas $\frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{Q}$ (en notations du § 8.5) met au jour un **nouveau type** de destin pour une trajectoire.

En effet, il n'y a pas d'équilibre et, z_0 étant un point quelconque du tore, $\phi(t, z_0)$ s'approche infiniment souvent arbitrairement près de tout point du tore. Donc, $\omega(z_0) = T$ et par conséquent :

- $\omega(z_0)$ n'est pas un équilibre : la trajectoire ne connaît pas le destin n° 1 ;
- tout point de $\omega(z_0)$ est régulier, mais aucun n'a pour ensemble-limite un équilibre : la trajectoire ne connaît donc pas le destin n° 2 ;
- $\omega(z_0)$ n'est pas une orbite périodique. La trajectoire échappe aussi au destin n° 3.

C'est donc bien un **destin du quatrième type**, ou destin n° 4, que l'on a mis en évidence.

- soit de se placer dans $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avec $n > 2$. On peut par exemple plonger dans $\mathbb{R}^3$ le tore précédemment évoqué, donc muni d'un flot hélicoïdal irrationnel, et étendre ce dernier de façon convenable à un domaine de $\mathbb{R}^3$.

Dans les deux exemples évoqués, les trajectoires obtenues présentent un haut degré de régularité. Sur T , le flot s'exprime d'ailleurs analytiquement d'une façon très simple : $\phi(t, z_0) = z_0 + at$, à une congruence près modulo 1 sur chacune des deux coordonnées. De plus, deux états initiaux z_0 et z_1 proches donnent lieu à des trajectoires $\phi(t, z_0)$

et $\phi(t, z_1)$ proches pour tout t . Il n'y a donc pas de phénomène de **sensibilité aux conditions initiales**, notion précisée ci-après. En raison de ces propriétés, et pour ne pas mettre en défaut l'acception intuitive de l'adjectif « chaotique », les trajectoires ne sont pas qualifiées de chaotiques.

Il convient de donner maintenant une première définition du chaos. On appellera **chaotique** une trajectoire qui, tout en restant bornée pour $t \rightarrow \infty$:

- échappe aux 3 destins décrits par le théorème de Poincaré-Bendixson ;
- présente **de plus** une sensibilité particulière aux conditions initiales.

La « sensibilité particulière » sera décrite au moyen de la notion d'exposant de Liapounov, que nous connaissons déjà mais pour les systèmes à temps discret. Notons aussi que l'existence même de trajectoires chaotiques n'est pas triviale. Le chaos constituera un destin du cinquième type.

Les tores KAM

Le flot hélicoïdal irrationnel sur le tore (problème 8.1) est un exemple de trajectoire *quasi-périodique*. Au milieu du XX^e siècle, a été établi l'important **théorème KAM**, qui implique des trajectoires quasi-périodiques sur des tores multidimensionnels. Ce théorème dont le premier énoncé en 1954 est dû à Kolmogorov a été démontré une décennie plus tard par Arnold et Moser (d'où les initiales KAM). On sait qu'un système hamiltonien ne peut pas avoir d'équilibre asymptotiquement stable (exercice 6.1). Le théorème KAM donne une autre propriété importante de certains systèmes hamiltoniens perturbés : la possible conservation de **tores invariants par le flot**, sur lesquels le mouvement est quasi-périodique.

11.3.2 Trajectoires chaotiques : définition

Au chapitre précédent nous avons défini, pour le système $x_{n+1} = f(x_n)$ à temps discret :

- le nombre de Liapounov de l'orbite $Orb[x_0]$ associé au couple (x_0, u) par :

$$L(x_0, u) = \lim_{m \rightarrow \infty} \|(\nabla f_{x_{m-1}} \circ \dots \circ \nabla f_{x_1} \circ \nabla f_{x_0})(u)\|^{1/m} \text{ (avec } u \text{ unitaire)}$$

ceci, si la limite existe ;

- l'exposant de Liapounov de l'orbite $Orb[x_0]$ associé au couple (x_0, u) par :

$$h(x_0, u) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \ln \|(\nabla f_{x_{m-1}} \circ \dots \circ \nabla f_{x_1} \circ \nabla f_{x_0})(u)\| \text{ (avec } u \text{ unitaire)}$$

ceci, si la limite existe. On a $h(x_0, u) = \ln[L(x_0, u)]$.

Exposant de Liapounov en temps continu

Soit S le système $\dot{x} = f(x)$ dont le flot est $x(t) = \phi(t, x_0)$ et S_D le système discrétisé à la période 1, c'est-à-dire le système : $x_k = \phi(k, x_0)$ défini pour $k \in \mathbb{N}$.

Ce système met en jeu la fonction g associant à x son descendant après écoulement d'un temps unité : $g(x) = \phi(1, x)$. On a en effet l'équation récurrente $x_{k+1} = g(x_k)$.

Les notions de nombre de Liapounov et d'exposant de Liapounov pour S se définissent par l'intermédiaire du système S_D associé, c'est-à-dire :

Le **nombre de Liapounov** et l'**exposant de Liapounov** de l'orbite $Orb(x_0)$ associés à la direction u sont le nombre de Liapounov et l'exposant de Liapounov de l'orbite $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ du système S_D .

Ces nombres sont, soulignons-le, associés au couple (x_0, u) , avec u unitaire $\in \mathbb{R}^n$.

Trajectoires chaotiques

La notion d'exposant de Liapounov mesure la vitesse de divergence de deux trajectoires et permet de préciser la définition du chaos. La trajectoire $\phi(t, x_0)$ est dite **chaotique** si et seulement si :

- $Orb^+(x_0)$ est bornée ;
- $\omega(x_0)$ ne connaît aucun des trois destins prescrits par le théorème de Poincaré-Bendixson ;
- il existe $u \in \mathbb{R}^n$ unitaire tel que l'exposant de Liapounov associé à (x_0, u) soit strictement positif : $h(x_0, u) > 0$. On appelle cette propriété la **sensibilité aux conditions initiales**, en abrégé « sensibilité aux C.I. » ou encore S.C.I.

Ainsi, le chaos correspond-il à un **cinquième type de destin**, ou destin n° 5, marqué par la sensibilité aux conditions initiales (traduite par $h > 0$). On connaissait déjà des exemples élémentaires donnant $h > 0$, par exemple le système $\dot{x} = x$ dans $\mathbb{R}^n$. Mais la divergence mutuelle des trajectoires se fait dans ce cas en environnement **non borné**, alors que notre définition du chaos impose une évolution bornée, qu'on peut traduire par « diverger sans s'enfuir ».

Avant d'illustrer ce nouveau type de destin par un exemple emprunté aux sciences de l'environnement (convection atmosphérique), nous allons définir quelques notions nécessaires à sa compréhension.

11.3.3 Attracteurs

La théorie des systèmes dynamiques emprunte au vocabulaire courant le mot « attirer » et ses dérivés, pour désigner le fait qu'un ensemble, alors appelé *attracteur*,

voit se rapprocher de lui une ou plusieurs trajectoires. Néanmoins, il y a de multiples façons de traduire rigoureusement cette réalité intuitive, et la littérature scientifique présente effectivement des définitions diverses. Celle que nous donnons ci-après utilise plusieurs notions antérieurement définies.

Nous dirons que $A \subset \Omega$ est un **attracteur** s'il possède les trois propriétés suivantes :

- il est l'ensemble-limite d'un point $a \in \Omega : A = \omega(a)$;
- il est stable au sens de Liapounov (§ 3.3.1) ;
- son bassin d'attraction est de mesure positive : $\text{mes}[Att(A)] > 0$.

On remarquera que la notion d'attracteur est beaucoup plus restrictive que celle d'« ensemble qui attire ». Par exemple, pour le système $\dot{x} = -x$ dans $\mathbb{R}$, l'ensemble $A = [-1, +1]$ attire $\mathbb{R}$ tout entier mais n'est pas un attracteur car il n'est pas un ensemble-limite.

Exemples et contre-exemples

1. 0 est un attracteur pour le système $\dot{x} = -x$ dans $\mathbb{R}^n$.
2. Pour le système plan défini en coordonnées polaires par $\dot{\rho} = \rho(1 - \rho)$ et (hors point 0) par $\dot{\theta} = 1$, le cercle unité est un attracteur. La figure 7.1.b en constitue un portrait de phases.
3. Si Ω est le tore à deux dimensions (produit cartésien de deux cercles), nous avons vu que le « flot hélicoïdal irrationnel » (problème 8.1) conduit à des trajectoires partout denses sur le tore. Dans ce cas, Ω tout entier est un attracteur.
4. Le point 0, équilibre stable du système $\dot{x} = 0$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas un attracteur car $Att(0) = \{0\}$, qui est de mesure nulle.
5. Pour le système plan défini en coordonnées polaires par $\dot{\rho} = \rho|1 - \rho|$ et (hors point 0) par $\dot{\theta} = 1$, le cercle unité n'est pas un attracteur, car il n'est pas stable au sens de Liapounov. On notera qu'il attire pourtant le disque unité fermé, qui est de mesure $\pi > 0$ dans $\mathbb{R}^2$.

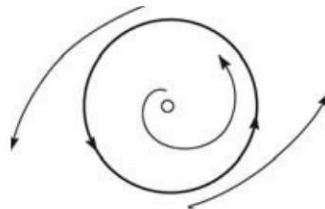


Figure 11.12 - Un cycle non attracteur.

6. Dans $\Omega = \mathbb{R}$, l'ensemble $A = \mathbb{R}_-$ est stable par le flot $\dot{x} = -x$ et a un bassin d'attraction (lui-même) de mesure infinie. Néanmoins, A n'est pas un attracteur car ce n'est pas un ensemble-limite.

Exercice 11.2 Ensembles stables, ensembles-limites, attraction

On considère un système localement lipschitzien sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Le but de l'exercice est de montrer que, si A est une partie de Ω , il n'existe aucune implication entre les trois propriétés suivantes (ou les propriétés contraires) :

- A est stable ;
- A est l'ensemble-limite d'un point $x_0 \in \Omega$;
- A attire un ensemble B de mesure de Lebesgue positive.

On montrera par des exemples que les $2^3 = 8$ cas d'observation ou non de ces propriétés se réalisent effectivement.

On notera que lorsque les trois propriétés sont réalisées, A est par définition un attracteur.

Les attracteurs classiques

Jusque dans les années 1960, et bien qu'on pût pressentir depuis les travaux déjà anciens de Poincaré que les comportements chaotiques réservaient des surprises, les attracteurs dûment répertoriés se classaient dans trois catégories seulement :

- les équilibres asymptotiquement stables ;
- les cycles-limites ;
- les tores bi- ou n -dimensionnels.

En toute rigueur, la 1^{re} catégorie peut être élargie comme l'illustre la figure 11.11, et la 2^e comme le montre la figure 7.2.

Les attracteurs étranges

En dehors des trois catégories classiques, il existe une nouvelle catégorie d'attracteurs mise en évidence en 1963 lors de l'étude de la convection atmosphérique, ainsi qu'on le présente dans le paragraphe 11.3.4.

Cette nouvelle catégorie présente un ensemble de caractéristiques qu'il semble *a priori* difficile de concilier, d'où l'appellation d'attracteur étrange.

On appelle **attracteur étrange** un attracteur possédant les propriétés suivantes :

- il est borné (donc compact car tout ensemble-limite est fermé) ;
- sa dimension fractale d dans $\mathbb{R}^n$ satisfait $2 < d < n$;
- toute trajectoire issue de l'attracteur est sensible aux conditions initiales, notion définie au paragraphe 11.3.2.

Remarques

1. La **dimension fractale** est définie en annexe 6. Elle généralise la notion de dimension habituelle (une droite est de dimension 1, un plan de dimension 2, etc.) à des ensembles plus complexes, les fractales, qui peuvent se voir attribuer une dimension d non-entière.
2. La condition $d < n$ implique que la mesure de Lebesgue de l'attracteur dans $\mathbb{R}^n$ est nulle.
3. Dans l'étude d'un attracteur étrange, la mise en évidence par une simulation numérique précède habituellement l'analyse théorique, qui peut s'avérer extrêmement difficile. Aussi, la majorité des attracteurs étranges font-ils l'objet de conjectures.

Exercice 11.3 Une fractale dans $\mathbb{R}$

Soit K l'ensemble des réels de $[0, 1]$ dont une écriture décimale au moins ne comporte pas le chiffre 5.

Exemples : $\frac{1}{2} = 0,5000\dots = 0,4999\dots$ $\frac{1}{3} = 0,3333\dots$,
 et $\frac{7}{10} = 0,7000\dots = 0,6999\dots$ appartiennent tous trois à K .

1. Montrer que K est compact.
2. Calculer la dimension fractale δ de K .

Intermède : le cantor au secours de Cantor

Un pianiste amateur de mathématiques vient de calculer la dimension fractale $\delta = \frac{\ln 2}{\ln 3}$ de l'ensemble de Cantor (voir annexe 6), et en désire une valeur numérique. Il ne dispose hélas ni de calculatrice, ni de table de logarithmes, seulement d'un crayon et d'une feuille de papier. Comment peut-il s'en tirer ?

Il sait, et cela lui suffit, que Jean-Sébastien Bach, l'illustre cantor (maître de chapelle) de Leipzig, a promu la gamme tempérée. Celle-ci permet d'utiliser de manière très souple les 85 touches du piano, car elles définissent 84 demi-tons égaux... ou presque ! c'est d'ailleurs tout l'art des accordeurs que de gérer ce « presque ».

Or, 84 demi-tons représentent au choix :

- soit 7 octaves, chaque octave comptant 12 demi-tons ;
- soit 12 quintes justes, chaque quinte comptant 7 demi-tons.

Notre pianiste va alors traduire l'équation 7 octaves = 12 quintes en utilisant le fait que ces intervalles musicaux sont associés à des rapports de fréquences : 2 pour l'octave et $3/2$ pour la quinte.

On a donc $2^7 \simeq (3/2)^{12}$; le signe « $\simeq$ » traduit le « presque » dont on vient de parler. Prenant le logarithme des deux membres : $7 \ln 2 \simeq 12(\ln 3 - \ln 2)$, d'où $19 \ln 2 \simeq 12 \ln 3$. Donc, $\delta = \frac{\ln 2}{\ln 3} \simeq \frac{12}{19}$, que l'on sait calculer à la main depuis l'École primaire. L'ami des deux Cantor trouve ainsi $\delta \simeq 0,6316$ contre une valeur plus précise 0,6309, ce qui fait une erreur relative à peine supérieure à un pour mille !

Un attracteur étrange concilie deux exigences semblant contradictoires :

- le fait d'être borné ;
- la sensibilité aux conditions initiales.

En effet, une analyse superficielle de la sensibilité aux conditions initiales conduirait à en déduire un écart exponentiel entre trajectoires, donc le fait que celles-ci ne soient pas bornées. En fait cette sensibilité ne revêt qu'un caractère local et implique ici un **repliement** des trajectoires, et non l'éloignement illimité de l'état.

Ces commentaires sont de nature qualitative et mériteraient évidemment une étude plus approfondie et rigoureuse.

11.3.4 Chaos et attracteurs étranges : un exemple

Nous allons terminer cette introduction au chaos par un exemple classique, l'**attracteur de Lorenz**, qui revêt une importance particulière pour plusieurs raisons :

- il est le premier qui ait été mis en évidence grâce à des moyens informatiques ;
- il se situe dans $\mathbb{R}^3$, espace de dimension minimale permettant l'apparition du chaos ;
- le système correspondant est très simple : polynomial, de degré 2 seulement comme le système de Lotka-Volterra, qui modélise en dimension 2 la dynamique proie-prédateur et dont on trouve la description dans de nombreux ouvrages ;
- enfin, il fait intervenir un attracteur qui n'est pas dénué de qualités esthétiques !

Un brin d'histoire

À la fin des années 1950, au MIT, le météorologue Edward Lorenz (qu'on ne confondra pas avec le physicien Hendrik Antoon Lorentz ni avec l'éthologue Konrad Lorenz, tous deux lauréats du prix Nobel) vient d'acquiescer un ordinateur imposant et déjà assez performant pour simuler la dynamique atmosphérique par un système de dimension 12.

L'intuition d'une impossibilité de prédictions météorologiques à long terme l'a amené à rechercher des solutions qui échappent aux 3 destins prescrits par le théorème de Poincaré-Bendixson. Notons que cette recherche eût été vaine en dimension 2, mais que Lorenz se plaçait en dimension supérieure. Il n'a pas tardé à découvrir un phénomène remarquable de sensibilité aux conditions initiales, et s'est aussitôt attaché à simplifier le système initial autant que possible, tout en conservant le phénomène observé.

Lorenz a ainsi abouti au système d'ordre 3 suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = -xz + rx - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

Dans ce système, les 3 coordonnées x , y et z ne sont pas des coordonnées d'espace mais représentent des grandeurs physiques qui modélisent le problème de la convection d'un fluide bidimensionnel soumis :

- aux forces de gravité ;
- à un gradient de température.

Cette convection répond au schéma suivant (cas de cellules convectives) :

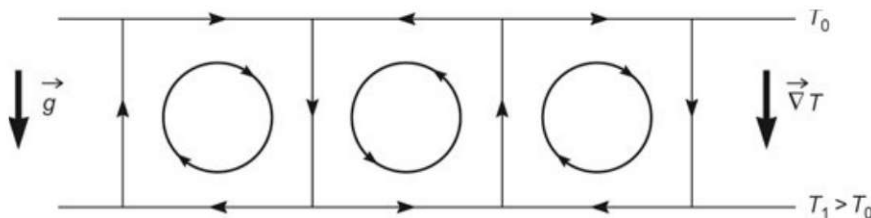


Figure 11.13 – Les cellules de Rayleigh-Bénard.

σ , b et r sont des paramètres. Certains choix de ces paramètres conduisent à un équilibre. D'autres choix donnent lieu à l'apparition de cellules convectives (figure 11.13), appelées **cellules de Rayleigh-Bénard**. Pour certaines valeurs des paramètres, par exemple $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 49/2$, apparaissent des trajectoires chaotiques.

Les phénomènes observés par Lorenz s'expliquent par la présence d'un *attracteur étrange* dont voici une représentation :

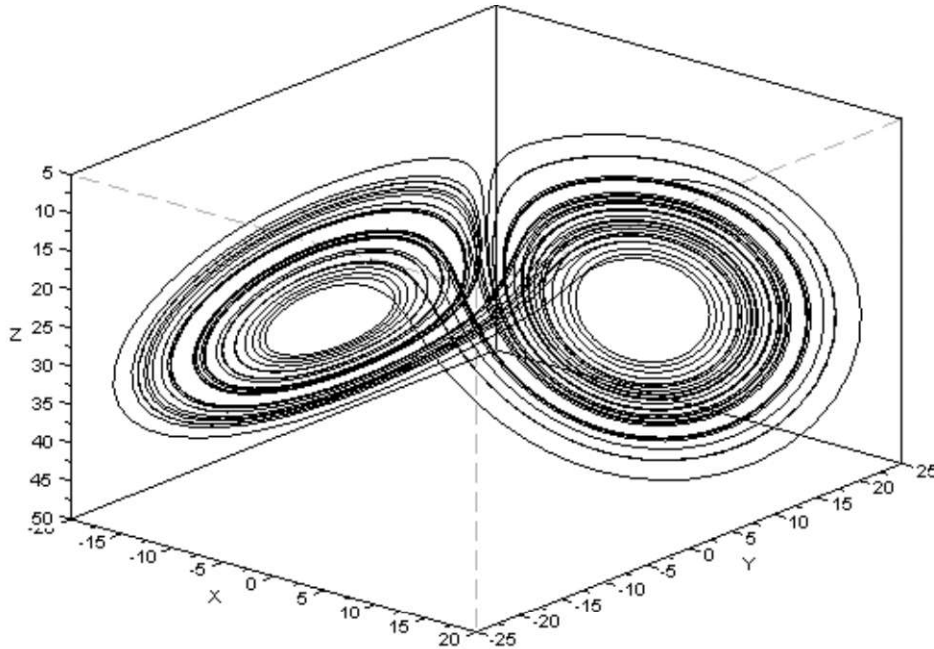


Figure 11.14 - L'attracteur de Lorenz.

Cet attracteur présente deux « ailes » dont aucune n'est invariante par le flot : après un certain nombre de tours sur l'une, le flot emprunte l'autre pour une nouvelle ronde, revient sur la première, et ainsi de suite.

Les simulations numériques amènent à attribuer à cet attracteur, appelé **attracteur de Lorenz**, une dimension fractale de 2,06 environ. Mais on ne connaît pas sa valeur exacte, ni sa nature rationnelle ou non. Cette dimension supérieure à deux indique que l'attracteur est « plus qu'une surface », tout en ayant un volume nul. En fait, l'apparence d'ailes sans épaisseur est trompeuse : une analyse plus poussée montre que l'attracteur comporte une infinité de feuillets très proches les uns des autres. Leur proximité est liée au caractère très dissipatif du flot : tout volume de l'espace des phases se contracte en effet très vite lors de son transport par le flot, ce que traduit l'égalité $\text{Div } f = -\sigma - 1 - b = -41/3$ (voir le § 2.3.3).

INTRODUCTION AU CHAOS EN TEMPS DISCRET

12

L'application logistique $x \in \mathbb{R} \mapsto f_r(x) = rx(1 - x)$ (où $r > 0$) se rencontre presque inévitablement dans la théorie des systèmes dynamiques, ceci pour plusieurs raisons :

- pour $x \in [0, 1]$, l'équation différentielle $\dot{x} = f_r(x)$ modélise bien l'évolution de la taille x d'une population dans un environnement dont les ressources limitées interdisent toute valeur de x supérieure à 1. Pour x faible, on retrouve la croissance exponentielle, dite malthusienne.
- pour $x \in [0, 1]$ et $k \in \mathbb{N}$, le système à temps discret $x_{k+1} = f_r(x_k)$ montre une grande variété de comportements lorsqu'on donne à r des valeurs croissantes ; il constitue une bonne approche de la notion de chaos.
- quel que soit le problème dans lequel on la met en jeu, la fonction $f_r(x)$ présente une simplicité qui favorise les raisonnements, voire permet des calculs analytiques.

L'application logistique a été analysée en 1845 par le mathématicien belge Pierre François Verhulst dans l'étude de la dynamique d'une population. La forme s'explique simplement : le système $\dot{x} = rx$, où x et r sont des réels positifs, modélise la croissance d'une population entourée de ressources inépuisables. L'environnement peut alors être qualifié d'infini.

La **finitude** du milieu est traduite par le facteur $(1 - x)$, qui empêche l'état x de franchir l'équilibre 1, valeur à laquelle on peut ramener tout plafond par un changement d'échelle. L'équation différentielle $\dot{x} = rx(1 - x)$ satisfait cette contrainte. Ce système monodimensionnel à temps continu se résout analytiquement quelle que soit la condition initiale x_0 ; l'analyse exhaustive de ce problème est possible et simple. Mais il en va autrement de la **suite logistique** $x_{k+1} = f_r(x_k)$. Son étude se révèle en effet riche et complexe et donne lieu à nombre de publications et de questions ouvertes, malgré la grande simplicité de la fonction en jeu.

12.1 LES ÉQUILIBRES DE LA SUITE LOGISTIQUE POUR $r > 0$

À partir de l'application logistique $f_r(x) = rx(1-x)$ (où $r > 0$), nous définissons le système à temps discret $x_{k+1} = f_r(x_k)$

12.1.1 Données de base

L'ensemble $\mathcal{E}$ des équilibres est donné par $f_r(x) = x$, c'est-à-dire $x(rx + 1 - r) = 0$, ce qui fournit deux équilibres (un seul si $r = 1$) : 0 et $a = 1 - \frac{1}{r}$.

On a $f'_r(x) = -2rx + r$, d'où $f'_r(0) = r$ et $f'_r(a) = 2 - r$, expressions utiles car la nature d'un équilibre est liée à la valeur de la dérivée en ce point.

1^{er} cas : $0 < r < 1$

Comme $|f'_r(0)| = |r| < 1$, 0 est un **puits** (équilibre stable attractif).

À l'opposé, $|f'_r(a)| = |2 - r| > 1$, ce qui montre que a est une **source** (équilibre instable répulsif).

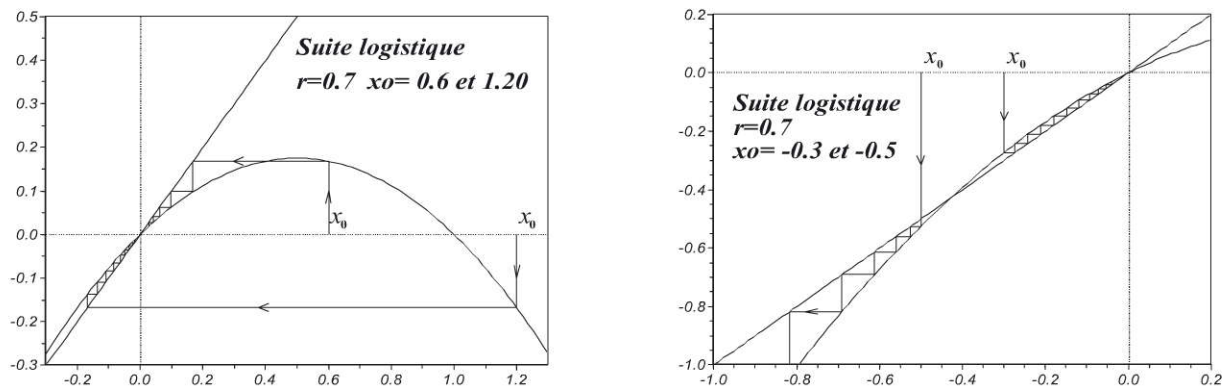


Figure 12.1- Diagramme itératif de la suite logistique pour $r = 0,7$ et 4 valeurs de x_0 .

L'examen du diagramme itératif permet d'identifier les bassins d'attraction, ce que confirmeraient des calculs analytiques élémentaires :

- $Att\{0\} =]a = 1 - 1/r, \frac{1}{r}[$ (intervalle ouvert I)
- $Att\{a\} = \{a\} \cup \{\frac{1}{r}\}$ (bornes de I)
- $Att\{-\infty\} = \mathbb{R} - [a, \frac{1}{r}]$ (intérieur du complémentaire de I)

12.1. Les équilibres de la suite logistique pour $r > 0$

2^e cas : $r = 1$

Alors, $f_r(x) = f_1(x) = x(1 - x)$. Les équilibres 0 et a coïncident.

Nous avons $|f'_r(0)| = |r| = 1$. Ce simple constat ne permet pas de conclure sur la nature de l'équilibre, mais l'examen du diagramme itératif atteste que $0 = a$ est **instable**. On peut le qualifier de semi-stable car il est « attractif à droite » et « répulsif à gauche ». Il n'est pas attractif au sens strict.

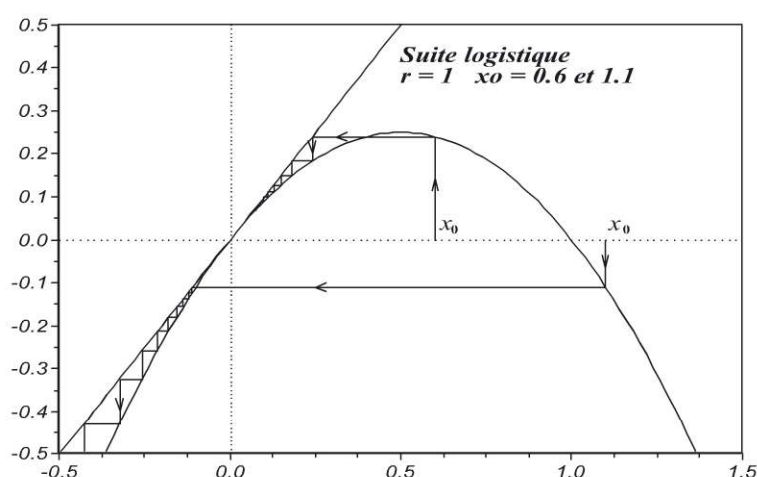


Figure 12.2 – Mise en évidence de la semi-stabilité en 0.

- Bassins d'attraction :
- $Att\{0 = a\} = [0, 1]$
 - $Att\{-\infty\} = \mathbb{R} - [0, 1]$

Nous restreindrons désormais notre étude à $x \in [0, 1]$, segment au sein duquel se rencontrent les phénomènes les plus intéressants.

3^e cas : $1 < r < 3$

$|f'_r(0)| = |r| > 1$. Donc, 0 est une **source** (équilibre instable répulsif).

À l'opposé, $|f'_r(a)| = |2 - r| < 1$, ce qui montre que a est un **puits** (équilibre stable attractif, c'est-à-dire asymptotiquement stable). Nous noterons $1 = r_0$ la valeur de r au-delà de laquelle nous venons de constater que a devient stable.

Le diagramme met en évidence les bassins d'attraction :

- $Att\{0\} = \{0\} \cup \{1\}$ (bornes de I)
- $Att\{a\} =]0, 1[$ (intervalle ouvert $I =]0, 1[$)

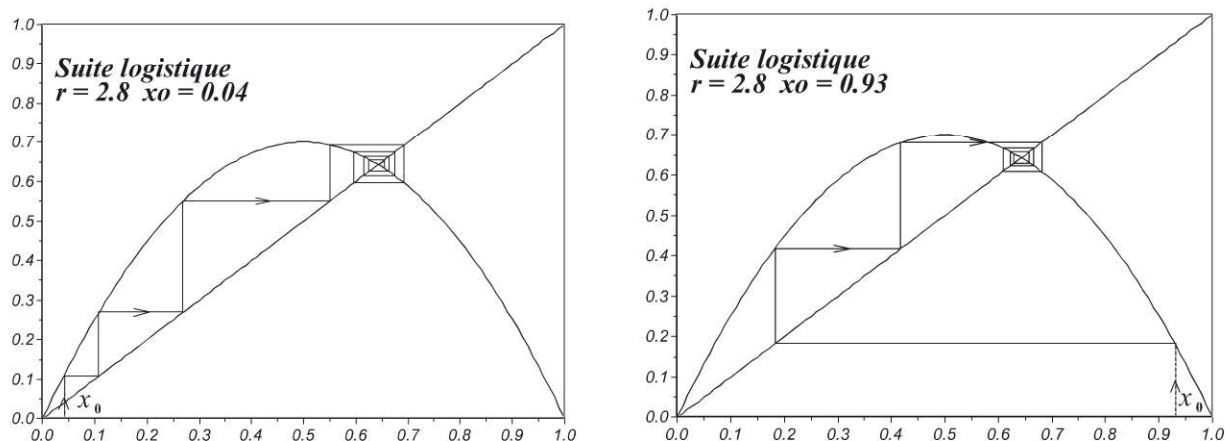


Figure 12.3 – Pour tout x_0 pris dans $]0, 1[$, l'état x_k converge vers $a = 1 - 1/r$.

Pour $r = 2$, la dérivée à l'équilibre a est nulle, a est donc *superstable*. Ce qualificatif sera rappelé par la notation $2 = s_0$. La convergence est extrêmement rapide :

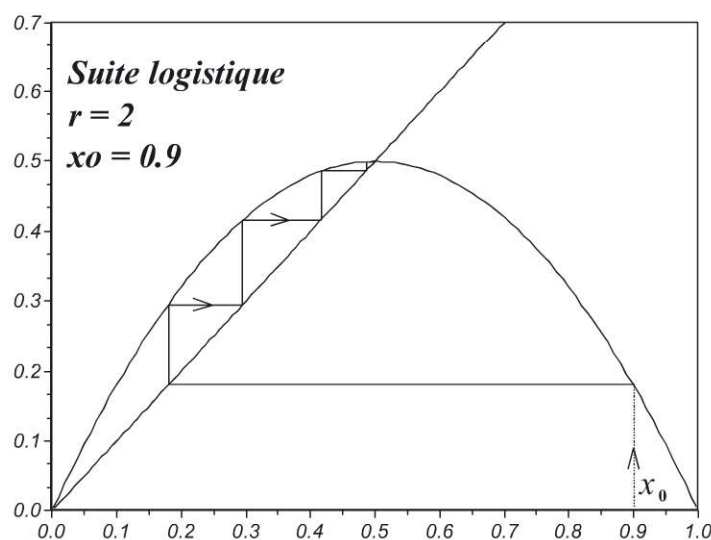


Figure 12.4 – a est super-attractif : les marches de l'escalier de convergence cessent d'être discernables après quelques itérations.

4^e cas : $r = 3$

Les deux équilibres sont alors 0 et $a = 1 - 1/r = 2/3$.

$|f'_r(0)| = |f'_3(0)| = |r| = 3 > 1$ montre que l'équilibre 0 est une *source*.

$|f'_r(a)| = |2 - r| = |-1| = 1$. Comme dans le 2^e cas, ce constat ne permet pas de conclure. Un calcul analytique (exercice 12.1) montre que a est un *puits*.

On pourrait aussi éviter tout calcul en construisant un diagramme itératif sur la fonction $f^2 = f \circ f$ de la figure 12.7 centrale.

Exercice 12.1 Un équilibre attractif pour $r = 3$

À l'équilibre a d'un système monodimensionnel, la valeur $|f'(a)| = 1$ ne permet pas de conclure quant à la nature stable ou instable de a . Dans le cas présent, un calcul analytique le permet.

Soit le système $x_{k+1} = f(x_k)$ avec $f(x) = 3x(1-x)$. On appelle a l'équilibre $2/3$, équilibre pour lequel $f'(a) = -1$.

1. Pour $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$, calculer le rapport d'éloignement $\frac{f(a + \varepsilon) - a}{\varepsilon}$.
Peut-on en déduire si a est ou non stable ?

2. Calculer le rapport d'éloignement sur deux itérations $\frac{f^2(a + \varepsilon) - a}{\varepsilon}$
(où f^2 désigne la fonction itérée $f \circ f$). Conclure quant à la stabilité de $a = 2/3$.

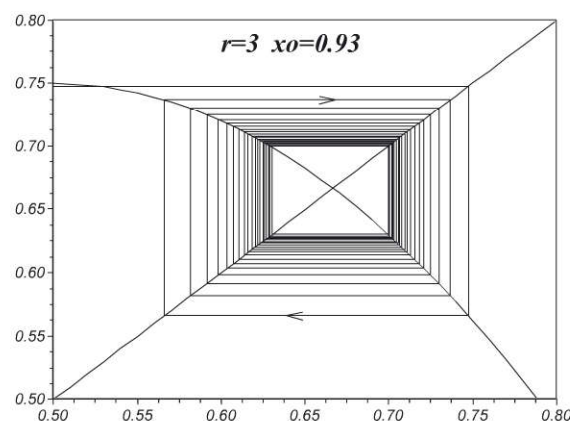
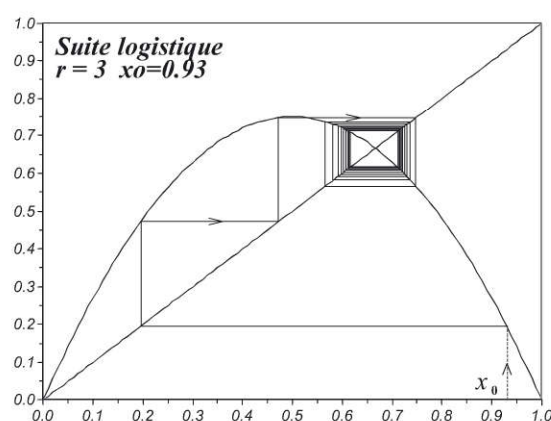


Figure 12.5 - Pour $r = 3$, et pour tout $x_0 \in [0, 1]$, il y a convergence de x_k vers $a = 2/3$, mais cette convergence est très lente. Le nombre d'itérations est 20 pour la figure de gauche, 40 pour le « zoom » de droite. Le bassin d'attraction est $\text{Att}\{2/3\} = [0, 1]$.

La suite va montrer que pour $r = 3$, valeur que nous noterons r_1 , le système présente une **bifurcation**.

5^e cas : $r > 3$

L'équilibre 0 est une **source** pour la même raison que dans le 4^e cas.

$|f'_r(a)| = 2 - r < -1$: l'équilibre a est donc lui aussi **instable**. L'éloignement par rapport à a se fait dans son voisinage de façon alternée : il y a divergence en spirale.

Ceci achève l'étude des équilibres. Mais ces derniers ne décrivent qu'une facette du comportement du système. Car les **cycles** sont des éléments structurants importants pour avoir une vue d'ensemble des trajectoires. La figure précédente en donne un premier aperçu. Nous reportons leur étude au paragraphe suivant, et constaterons que ce 5^e cas se divise lui-même en une série foisonnante de sous-cas.

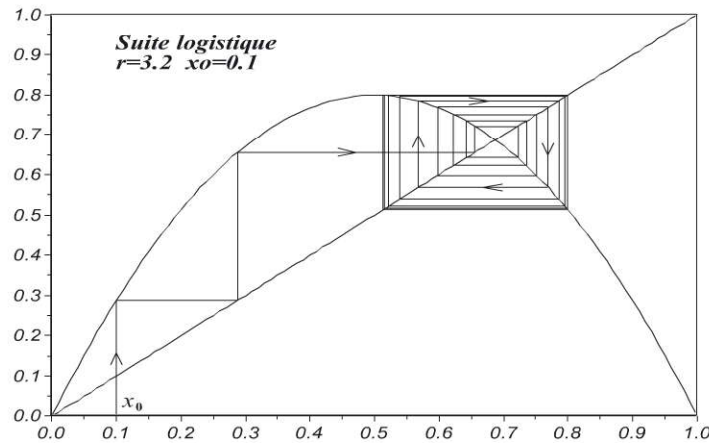


Figure 12.6 – L'équilibre $a = 1 - 1/r$ devient instable; un 2-cycle apparaît (voir § suivant).

12.2 LES CYCLES DE LA SUITE LOGISTIQUE POUR $3 < r \leq 4$

Précisons dès à présent que nous ne prolongerons pas l'étude au-delà de $r = 4$ car, pour $r > 4$, $f_r([0, 1])$ n'est plus contenu dans notre segment $[0, 1]$ d'analyse.

12.2.1 Existence d'un 2-cycle

La recherche des 2-cycles coïncide avec celle des équilibres du système : $x_{k+1} = f_r^2(x_k)$. Ceux-ci sont fournis par l'équation $f_r^2(x) - x = 0$, c'est-à-dire :

$$r^2 x(1-x)[1-rx(1-x)] - x = 0.$$

Cette équation s'écrit aussi :

$$x[r^3 x^3 - 2r^3 x^2 + (r^2 + r^3)x + (1 - r^2)] = 0,$$

équation dans laquelle le facteur x correspond à l'équilibre 0, qui est bien sûr aussi un équilibre du système f_r^2 .

Le crochet $[]$ s'annule nécessairement pour $x = a$ (car a est un équilibre du système f_r^2) et possède donc le facteur $x - a = x - 1 + \frac{1}{r}$. Sachant cela, la factorisation ne pose pas de problème et s'exprime

$$[] = (x - 1 + \frac{1}{r}) \cdot r \cdot \Pi(x), \text{ avec } \boxed{\Pi(x) = r^2 x^2 - r(1+r)x + (1+r)}.$$

Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = r^2(1+r)(r-3) = r^2 \delta$. Nous constatons l'existence de **deux racines** de $\Pi(x)$ pour $r > 3$. Elles correspondent à un **2-cycle**.

12.2. Les cycles de la suite logistique pour $3 < r \leq 4$

On peut résumer ces observations ainsi :

$$f_r^2(x) = x \iff \underbrace{x(x-a)}_{=0 \text{ en } 0 \text{ et } a} \underbrace{[r^2x^2 - r(1+r)x + (1+r)]}_{=0 \text{ au 2-cycle si } r>3} = 0$$

Pour $r = 3 + \varepsilon$, un développement limité fournit le 2-cycle $x = \frac{2}{3} \pm \frac{1}{3} \sqrt{\varepsilon} + o(\sqrt{\varepsilon})$.

Dans le plan (r, x) , le lieu des 2-cycles est donc assimilable, au voisinage du point $(3, \frac{2}{3})$, à la **parabole** $r = 3 + 9(x - 2/3)^2$, qui a en ce point une tangente verticale.

Dans la suite, pour alléger les notations, nous noterons f la fonction précédemment notée f_r .

12.2.2 Stabilité du 2-cycle

Nous nous plaçons dans le cas où $r > 3$, qui correspond à l'existence d'un 2-cycle. Les racines x' et x'' du polynôme $\Pi(x)$ sont $\frac{1}{2r}(1 + r \pm \sqrt{\delta})$, avec $\delta = (1+r)(r-3)$; $f'(x) = -2rx + r = -1 \pm \sqrt{\delta}$.

D'où $f'(x') \cdot f'(x'') = (-1 + \sqrt{\delta})(-1 - \sqrt{\delta}) = 1 - \delta = \frac{-r^2 + 2r + 4}{r}$. Cette expression vaut 1 pour $r = 3$. Quand r augmente, elle décroît jusqu'à 0 pour $r = 1 + \sqrt{5} \simeq 2,236$, puis jusqu'à -1 pour $r = 1 + \sqrt{6} \simeq 2,449$ et reste inférieure à -1 pour $r > 1 + \sqrt{6}$. Ceci montre que le 2-cycle, qui existe toujours pour $r > 3$:

- est **stable** pour $3 < r < 1 + \sqrt{6}$ (**superstable** pour $r = 1 + \sqrt{5}$) ;
- est **instable** pour $r > 1 + \sqrt{6}$.

La figure 12.6 correspond à $r = 3,2$ et met donc en évidence un 2-cycle **stable**. Une autre approche aboutit aux mêmes conclusions : l'analyse du système $x_{k+1} = f^2(x_k)$, où f^2 désigne le carré de f au sens de la composition ($f^2 = f \circ f$).

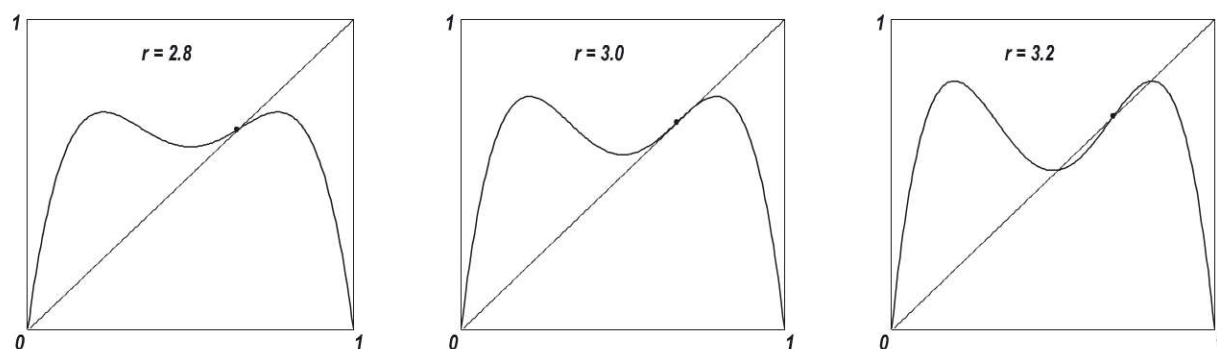


Figure 12.7 - Courbe $x \mapsto f^2(x) = (f \circ f)(x)$; le petit point noir figure l'équilibre $a=1-1/r$. Pour $r = 3$ (figure centrale), une bifurcation introduit un 2-cycle (figure de droite).

Ce schéma illustre bien la nature de la bifurcation : pour $r < 3$ le graphe de f^2 coupe la 1^{re} bissectrice en 0 et à l'équilibre $a = 1 - 1/r$ qui, solution de $f(x) = x$, est *a fortiori* solution de $f^2(x) = x$. Pour autant, a n'est pas élément d'un 2-cycle propre. Pour $r > 3$, la figure de droite fait apparaître deux solutions de $f^2(x) = x$ qui encadrent la valeur $a = 1 - 1/r$. Ce sont les racines x' et x'' du polynôme $\Pi(x)$, de valeurs $\frac{1}{2r}[1 + r \pm \sqrt{\delta}]$, avec $\delta = (1 + r)(r - 3)$. Lorsque r dépasse la valeur 3, on constate :

- le dépassement par $|f'(a)|$ de la valeur 1 : donc, a devient **instable** ;
- une valeur strictement inférieure à 1 du multiplicateur $|f'(x') \times f'(x'')| = |1 - \delta|$, ce qui montre que le 2-cycle apparu est **stable**.

En résumé, on a mis en évidence une **bifurcation** « équilibre stable vers équilibre instable + 2-cycle stable ».

Notons que pour $\delta = 1$ le multiplicateur $(f^2)'(x) = 1 - \delta$ du cycle est nul : le cycle est par définition **super-attractif**, qualificatif en accord avec son homonyme relatif aux équilibres. On peut en effet considérer qu'un équilibre a est un 1-cycle de multiplicateur $f'(a)$. Le paramètre r vaut alors $s_1 = 1 + \sqrt{5} \approx 3,236$. Rappelons que pour $r = s_0 = 2$, nous avons identifié la super-attractivité de l'équilibre $1/2$.

12.2.3 Bifurcations de doublement de période

Comme nous avons vu que le 2-cycle devient instable pour $r > 1 + \sqrt{6}$, la valeur $r = 1 + \sqrt{6}$, notée r_2 , est une **bifurcation**. Le multiplicateur du 2-cycle est alors $1 - \delta = -1$.

Il en résulte que $(f^4)'(x') = (f^4)'(x'') = 1$. La courbe de la 4^e itérée de f est dans ce cas tangente à la 1^{re} bissectrice aux points d'abscisses x' et x'' . Pour $r > 1 + \sqrt{6}$, elle la traverse en quatre nouveaux points qui représentent un **4-cycle**.

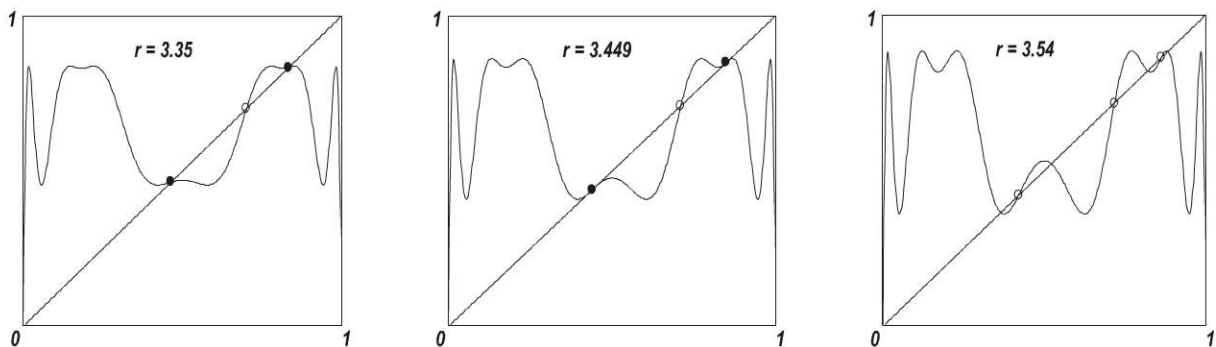


Figure 12.8 - Courbe $x \mapsto f^4(x) = (f^2 \circ f^2)(x)$. Pour $r = 1 + \sqrt{6}$ (figure centrale), la courbe de f^4 est tangente en deux points à la 1^{re} bissectrice, puis la traverse pour $r > 1 + \sqrt{6}$

12.2. Les cycles de la suite logistique pour $3 < r \leq 4$

Ce schéma, dont la logique est la même que celle de la figure 12.7, montre la génèse de la bifurcation : pour $r < 1 + \sqrt{6} \simeq 3,449$ le graphe de f^4 coupe la 1  re bissectrice en trois points, représentant l'équilibre a et un 2-cycle stable. Pour $r > 1 + \sqrt{6}$, la figure de droite fait apparaître quatre autres solutions de $f^4(x) = x$ qui encadrent les valeurs x' et x'' . On constate simultanément :

- $|f'(x') \times f'(x'')| > 1$: donc, le 2-cycle devient *instable* ;
- une valeur strictement inférieure à 1 de $|(f^4)'|$ aux 4 nouvelles racines, ce qui atteste la *stabilité* du 4-cycle nouvellement appar  .

En résumé, on a mis en évidence une bifurcation «   quilibre instable + 2-cycle stable vers équilibre instable + 2-cycle instable + 4-cycle stable ».

12.2.3.1 Les 4-cycles

Voici le diagramme obtenu pour $r = 3,54 (> 1 + \sqrt{6})$:

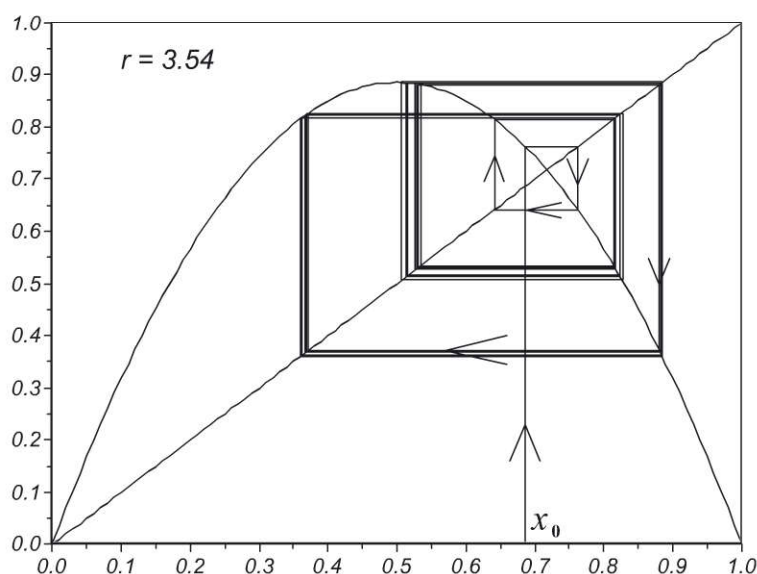


Figure 12.9 – Pour $r = 3,54$ il y a un 4-cycle stable. Les premières itérations s'éloignent de $a = 1 - 1/r$, équilibre instable. Il y a ensuite convergence suffisamment rapide vers le 4-cycle pour qu'on ne puisse pas distinguer les 40 itérations.

Toujours pour $r = 3,54$, revisitons la figure 12.8 droite :

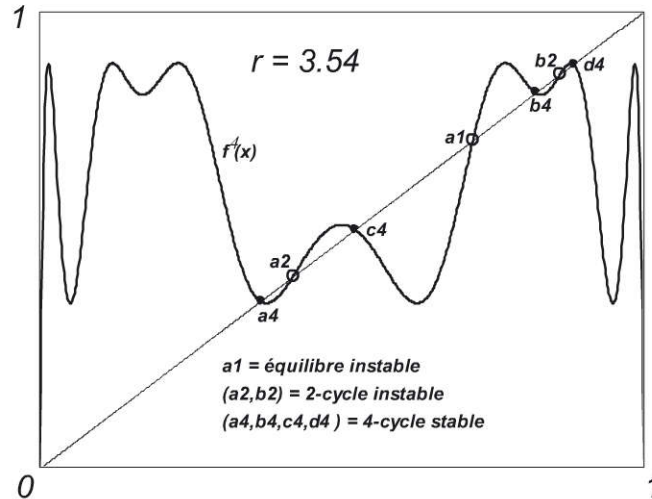


Figure 12.10 – Les points d'intersection de la courbe $x \mapsto f^4(x)$ et de la 1^{re} bissectrice sont liés aux équilibres, 2-cycles et 4-cycles du système $x_{k+1} = f(x_k)$.

On observe que, mise à part la solution triviale 0, la courbe de la 4^e itérée $x \mapsto f^4(x)$ coupe la première bissectrice en 7 points :

- $a_1 = 1 - 1/r$ est l'unique équilibre simple sur $]0, 1[$. Il est *instable* ;
- (a_2, b_2) : il s'agit du 2-cycle $\frac{1}{2r}[1 + r \pm \sqrt{(1+r)(r-3)}]$, apparu pour $r > 3$ et devenu *instable* au-delà de $r = 1 + \sqrt{6} \simeq 3,449$;
- (a_4, b_4, c_4, d_4) : il s'agit du 4-cycle apparu pour $r > 1 + \sqrt{6}$: ce 4-cycle est *stable*, ce que l'on peut constater soit par examen de la figure 12.10, soit par calcul du multiplicateur $(f^4)'(a_4) = \dots = (f^4)'(d_4)$: ce nombre appartient en effet à $] -1, +1[$. Le cycle est décrit dans l'ordre $a_4 \rightarrow b_4 \rightarrow c_4 \rightarrow d_4 \rightarrow a_4$.

12.2.3.2 Les 2^m -cycles

Par un mécanisme analogue aux bifurcations précédentes, l'augmentation des valeurs de r conduit à de nouveaux *douplements de période*, donc à un 8-cycle, un 16-cycle, et ainsi de suite. Les valeurs successives des r correspondants sont de plus en plus rapprochées, et convergent à peu près exponentiellement (le facteur est inférieur à $1/4$; nous y reviendrons) vers une valeur limite. Retenons donc que pour tout m entier, il y a dans une plage convenable de valeurs de r un 2^m -cycle stable, qui bifurque vers un 2^{m+1} -cycle stable.

12.2.3.3 Diagramme de bifurcation

Si l'on choisit x_0 dans le bassin d'attraction d'un k -cycle, alors après une phase (ou régime) qu'on peut qualifier de **transitoire**, le système suit le k -cycle avec une précision arbitrairement grande. Dans cette phase que les physiciens nomment **permanente**, le système emprunte chaque état du k -cycle une fois sur k . On peut donc de façon naturelle attribuer une **probabilité** $1/k$ à chacun des éléments du k -cycle. À cette probabilité, s'associe la **fonction de répartition** $F(x)$ de l'état, probabilité que l'état soit inférieur ou égal à x .

Une analyse plus fine que nous ne détaillerons pas établit l'égalité entre moyennes temporelle et statistique, que l'on nomme **ergodicité**. Celle-ci permet d'identifier $F(x)$ à la limite, quand $n \rightarrow \infty$, de la proportion de x_i ($i = 0$ à n) inférieurs ou égaux à x . Si l'on porte en abscisse les valeurs de r et en ordonnée les valeurs des x_i obtenues en régime permanent, on obtient des éléments du **diagramme de bifurcation**.

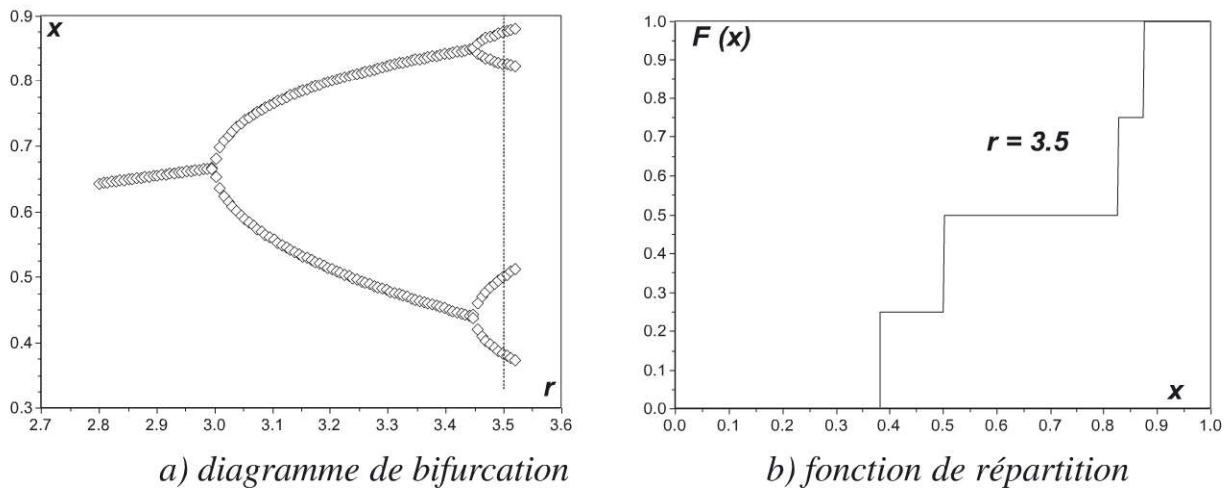


Figure 12.11 – a) Esquisse du diagramme de bifurcation de la suite logistique, r variant de 2,8 à 3,52.

b) Fonction de répartition pour $r = 3,5$.

La figure 12.11a, tracée en coordonnées (r, x) appelle déjà plusieurs remarques :

1. L'équilibre $a = 1 - 1/r$ apparaît ; le point $(r, 1 - 1/r)$ décrit une hyperbole d'asymptotes $r = 0$ et $x = 1$. Toutefois, comme l'esquisse fait apparaître les points effectivement visités en régime permanent, l'équilibre a n'apparaît que lorsqu'il est **stable**, c'est-à-dire lorsque $r \leq 3$. C'est en cela que la figure ne représente qu'une partie du diagramme de bifurcation au sens habituel.
2. La même remarque vaut pour le 2-cycle, qui existe pour $r > 3$ mais n'est stable que pour $r \leq r_2 = 1 + \sqrt{6} \simeq 3,449$. Le 2-cycle devient ensuite instable et n'apparaît plus sur le diagramme.

3. Enfin, pour $r > 1 + \sqrt{6}$, le 2-cycle devient instable et n'apparaît donc plus. En revanche, il y a apparition d'un 4-cycle.

En résumé, ce diagramme montre :

- la bifurcation « équilibre stable vers équilibre instable + 2-cycle stable » pour $r = 3$;
- la bifurcation « équilibre instable + 2-cycle stable vers équilibre instable + 2-cycle instable + 4-cycle stable » pour $r = 1 + \sqrt{6}$.

Mais il ne montre pas les équilibres ou cycles instables. Il s'agit en fait plus d'une figuration des *points adhérents* de la suite x_k que d'un diagramme de bifurcation complet, bien que cette dernière dénomination soit consacrée par l'usage.

La figure 12.11b (tracé de $F(x)$ pour $r = 3,5$) montre un saut de valeur $1/4$ en chacun des x constituant le 4-cycle. La valeur $r = 3,5$ est représentée par un pointillé vertical en figure 12.11a.

Signalons que les quatre segments verticaux de longueur $1/4$ (figure 12.11b) sont attachés au mode de tracé mais n'appartiennent pas au graphe de $F(x)$, qui est discontinu.

12.2.4 Des m -cycles pour tout m

Nous avons vu que pour tout m , il existe une plage de valeurs de r pour lesquelles il existe un 2^m -cycle. Mais peut-on mettre en évidence un m -cycle pour tout m entier positif ? La réponse est positive et tient en deux points :

- il existe un 3-cycle pour certaines valeurs de r ;
- le **théorème de Sarkovski** indique que s'il existe un cycle d'ordre 3, alors il existe des m -cycles pour tout m entier supérieur à 1.

Ce théorème, que nous ne démontrerons pas s'appuie sur la relation d'ordre $\triangleright$ suivante :

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright 9 \triangleright 11 \triangleright \dots \triangleright 3 \cdot 2^1 \triangleright 5 \cdot 2^1 \triangleright 7 \cdot 2^1 \triangleright 9 \cdot 2^1 \triangleright \dots \\ \dots \triangleright 3 \cdot 2^m \triangleright 5 \cdot 2^m \triangleright 7 \cdot 2^m \triangleright 9 \cdot 2^m \triangleright \dots \triangleright 2^m \triangleright \dots \triangleright 16 \triangleright 8 \triangleright 4 \triangleright 2 \triangleright 1.$$

Apparaissent donc dans l'ordre croissant tous les impairs, puis leurs doubles, puis leurs quadruples, etc., enfin toutes les puissances de 2 par ordre décroissant. Le théorème de Sarkovski dispose que si le système possède un k -cycle, il possède un m -cycle pour tout m tel que $k \triangleright m$ (par exemple, par transitivité de $\triangleright$, on a $3 \triangleright 2$).

En outre, la fenêtre de périodicité 3 qui s'ouvre à $r = 1 + \sqrt{8} \approx 3,828427$ débouche lorsqu'on augmente r vers une zone de 6-cycles, puis de 12-cycles, $\dots$, 3×2^m -cycles, etc. Cette cascade de doublements de période est un phénomène général qui s'observe à partir de tout cycle, quelle qu'en soit la période.

12.3 LE CHAOS DANS UN SYSTÈME À TEMPS DISCRET

Cette section concerne les systèmes à temps discret sur $\mathbb{R}^n$, mais nous y ferons largement appel à l'exemple de la suite logistique, qui se généralise à une vaste classe de systèmes.

12.3.1 L'arbre de Feigenbaum

Pour la suite logistique, les valeurs de r aux bifurcations successives vers les 2-cycle, 4-cycle, ..., 2^m -cycle, tendent vers une limite r_∞ proche de 3,569946. L'existence de la limite résulte du fait que, si l'on nomme r_i la i -ème valeur de bifurcation, le rapport $(r_{i+1} - r_i)/(r_i - r_{i-1})$ tend vers un nombre strictement inférieur à 1. Son inverse est la **première constante** (ou nombre) **de Feigenbaum**, de valeur $\delta \simeq 4,669202$. Sa validité pour une large classe de suites a été prouvée en 1964 par Mitchell Feigenbaum, physicien théoricien américain.

Par ailleurs, les valeurs des écartements en x des diverses « fourches » de l'arbre ont des rapports qui tendent vers la **deuxième constante** (ou nombre) **de Feigenbaum**, de valeur $\alpha \simeq 2,502908$. L'extension du diagramme de bifurcation jusqu'à la valeur $r = 4$ met clairement en évidence la suite de bifurcations de doublement de période. Les deux branches se divisent en quatre comme le montre la figure 12.11a, puis en huit, seize, etc. (figure 12.12), ceci jusqu'à la valeur $r_\infty \simeq 3,569946$ au-delà de laquelle apparaît le phénomène de **chaos**. Les premières valeurs des r_i (bifurcations) et s_i (superstabilité) sont les suivantes :

$r_0 = 1$	(a devient stable)	$s_0 = 2$
$r_1 = 3$	(début 2-cycle)	$s_1 = 1 + \sqrt{5} \simeq 3,236068$
$r_2 = 1 + \sqrt{6} \simeq 3,449490$	(début 4-cycle)	$s_2 \simeq 3,498562$
$r_3 \simeq 3,544090$	(début 8-cycle)	
$r_4 \simeq 3,564407$	(début 16-cycle)	
...		
$r_\infty \simeq 3,569946$		

La nature arborescente du diagramme, tout au moins jusqu'à r_∞ lui vaut aussi l'appellation d'**arbre de Feigenbaum**. L'exploration de ses propriétés fines donne lieu depuis les années 1960 à une abondante littérature.

12.3.2 Le chaos en temps discret

Pour les systèmes à temps continu $\dot{x} = f(x)$, l'exemple dans $\mathbb{R}^3$ du système de Lorenz, pour lequel f est polynômiale de degré 2, nous a montré que l'apparition du chaos n'exige pas de recourir à une fonction f sophistiquée.

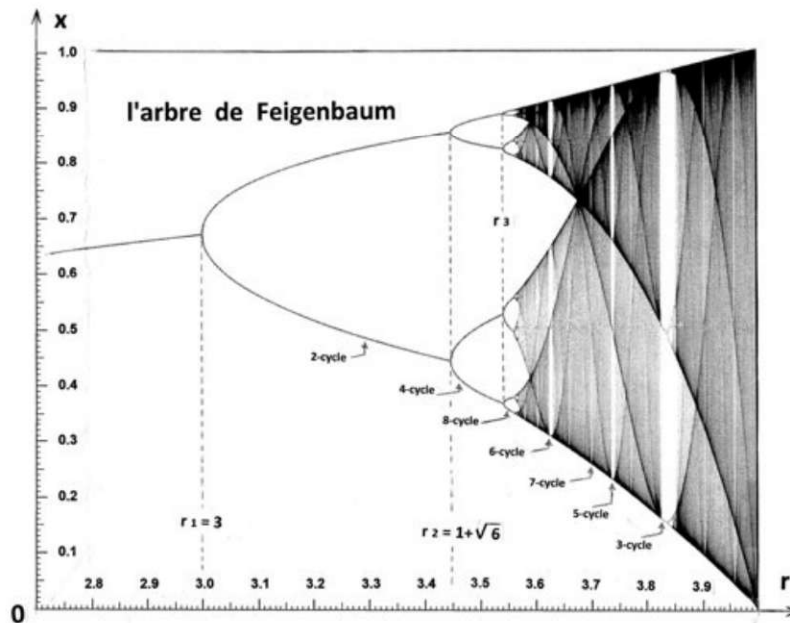


Figure 12.12 – Le diagramme de bifurcation, ou arbre de Feigenbaum.

Le constat est encore plus net pour les systèmes à temps discret car nous disposons avec la suite logistique d'un système également polynômial de degré 2, mais de *dimension 1*, et qui donne lieu pour des valeurs convenables de r à un comportement chaotique. Observons en effet la fonction de répartition $F(x)$ pour une valeur excédant la limite ($r_\infty \simeq 3,569946$) des doublements de période initiaux.

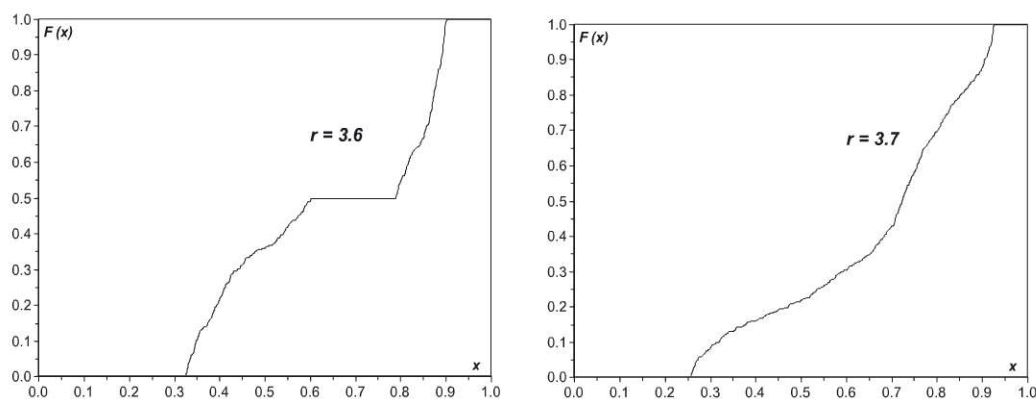


Figure 12.13 – La fonction de répartition pour deux valeurs de r .

Les différences avec la figure 12.11b sont frappantes :

- il n'y a plus de saut apparent, les courbes semblent continues ;
- les valeurs de x semblent denses dans un (figure 12.13 droite) ou deux (figure 12.13 gauche) intervalles.

Nous utilisons sciemment un vocabulaire prudent, car la complexité des phénomènes en jeu peut conduire à des apparences trompeuses !

12.3.2.1 Les trajectoires chaotiques

Nous traduirons la complexité de la dynamique par le terme de **chaos**. Nous nous plaçons dans le cas général d'un système défini sur $\mathbb{R}^n$. Comme nous l'avons fait pour les systèmes à temps continu, nous qualifions une trajectoire de **chaotique** lorsque deux exigences apparemment contradictoires (orbites bornées mais divergentes) sont réunies :

Trajectoires chaotiques

La trajectoire $k \in \mathbb{N} \mapsto \phi(k, x_0)$ d'un système défini sur $\mathbb{R}^n$ est **chaotique** si et seulement si :

- $Orb(x_0)$ est bornée (comme $k \in \mathbb{N}$, $Orb = Orb^+$) ;
- il y a sensibilité aux conditions initiales, c'est-à-dire : il existe $u \in \mathbb{R}^n$ unitaire tel que l'exposant de Liapounov $h(x_0, u)$ (voir § 10.5) soit positif.

Signalons qu'il existe d'autres définitions, dont certaines imposent aussi des propriétés de « brassage » du flot.

Revenons à la suite logistique. L'analyse effectuée jusqu'à présent montre que pour les faibles valeurs de r , le système n'est pas chaotique : cette constatation est nette lorsqu'il y a un équilibre ou un 2-cycle attractif, pour $r < 1 + \sqrt{6}$, mais ne se prolonge que jusqu'à $r_\infty \simeq 3,569946$. Au-delà, l'arbre de Feigenbaum présente des zones de plus grande densité coupées de plages de valeurs de r (« clairières ») dans lesquelles existent des cycles attractifs. Lorsque l'on s'approche de la valeur $r = 4$, ces clairières deviennent de plus en plus ténues, l'arbre se densifie. Ainsi, avec une définition du chaos voisine de celle que nous avons donnée, Jakobson a montré en 1981 que « plus r s'approche de la valeur 4, moins on a de chances d'échapper au chaos ». L'énoncé rigoureux revêt une forme plus abstraite faisant appel à la mesure de Lebesgue.

On montre par ailleurs l'existence de m -cycles stables pour toute valeur de m . Ceci est mis en évidence sur la figure 12.12 pour les valeurs de m de 2 à 8. Le cycle d'ordre impair le plus apparent est le 3-cycle, dont un calcul analytique montre l'apparition au-delà de $r = 1 + \sqrt{8} \simeq 3,8284$.

12.3.2.2 Les 3 types de mesure pour l'attracteur

$F(x)$ est la fonction de répartition d'une mesure de probabilité, par essence positive et de masse totale 1. Or, il existe trois types distincts de mesures et il est remarquable que, faisant varier r , on rencontre **les trois types** de mesure :

- **mesure discrète** : pour r conduisant à un m -cycle attractif, $F(x)$ présente m sauts d'amplitude $1/m$. La mesure est équirépartie sur les m points du cycle. Par exemple, $F(x)$ présente pour $r = 3,5$ quatre sauts d'amplitude $1/4$ (figure 12.11b).

- **mesure continue** : à partir de r_∞ , une infinité de valeurs de r conduisent à une fonction $F(x)$ continue, intégrale d'une densité. Le diagramme itératif correspondant (figure 12.14) atteste une trajectoire chaotique, avec balayage dense de l'intervalle limite (ici : $[0, 1]$) des valeurs de x ; pour cet exemple ($r = 4$), on se reportera au problème 12.1.

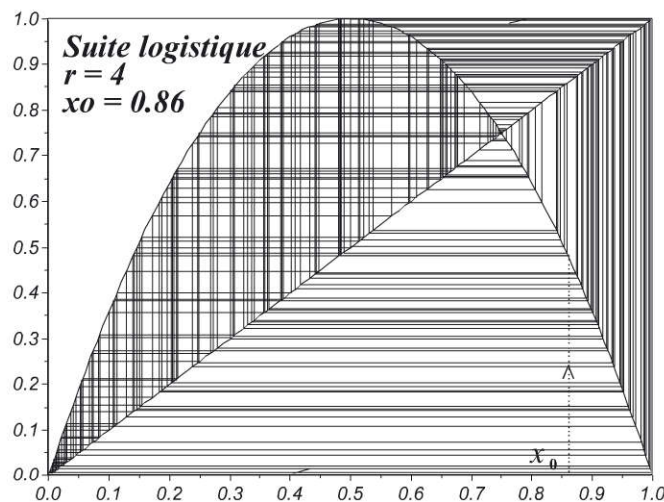


Figure 12.14 - Une trajectoire chaotique.

- **mesure singulière** : pour $r = r_\infty \simeq 3,569946$, on se trouve en limite de la cascade de doublements de période : l'arbre s'est divisé en 2 branches à partir de $r = 3$; 4 branches dès $r = 1 + \sqrt{6}$, puis 8, 16, ..., 2^m , ... branches. La limite de l'ensemble des points concernés, qu'on pourrait appeler la canopée en poussant la métaphore forestière, est homéomorphe à l'**ensemble triadique K de Cantor**, décrit en annexe 6, selon une correspondance décrite ci-après. Le graphe de la fonction $F(x)$ est alors un **escalier du diable** (figure 12.15). La mesure singulière que $F(x)$ intègre a pour support la canopée, qui est un ensemble non-dénombrable de mesure nulle. Cette mesure singulière n'est pas la somme d'une mesure continue et d'une mesure discrète. $F(x)$ est continue, de dérivée nulle hors de la canopée donc presque partout, et néanmoins croissante.

La correspondance canopée $\longleftrightarrow K$ est la suivante : à chaque bifurcation $r_1, r_2, \dots$, la progression vers la canopée (r_∞) se fait en choisissant l'embranchement bas ou l'embranchement haut. Si l'on attribue respectivement les valeurs 0 et 2 à ces deux possibilités, une progression vers r_∞ depuis le point initial ($r = r_1 = 3$) se traduit par une suite de 0 et de 2, par exemple une suite commençant par 022020. À cette suite, on associe le réel de $[0, 1]$ d'écriture ternaire 0,022020... On sait (revoir l'annexe 6) que l'ensemble K de tels nombres constitue l'ensemble triadique de Cantor.

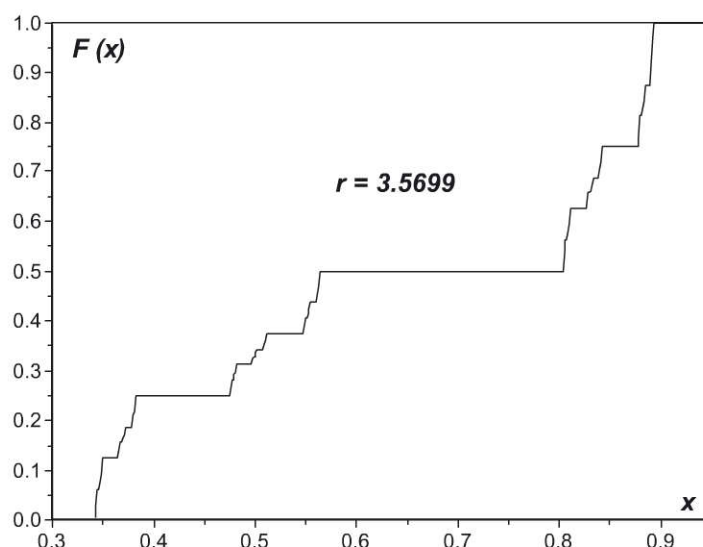


Figure 12.15 - L'escalier du diable : $F(x)$ pour $r = r_{\infty}$.

12.3.2.3 Le cas $r = 4$

Une approche analytique du cas $r = 4$ (problème 12.1 ci-après) permet d'établir une propriété importante que partagent de nombreux autres systèmes :

- l'ensemble des points de $I = [0, 1]$ possédant une orbite dense dans I est lui-même dense dans I ;
- l'ensemble des points de I à orbite finie, donc des points périodiques, est également dense dans I .

Ces deux ensembles disjoints s'interpénètrent donc : ils ont tous deux la même adhérence I . Toute trajectoire chaotique est arbitrairement proche d'une trajectoire non chaotique, et réciproquement.

12.3.2.4 Cas des systèmes à temps discret sur $\mathbb{R}^n$

Les observations qualitatives – cycles, doublements de périodes, chaos, etc. – que nous avons faites au sujet de la suite logistique, c'est-à-dire pour $f(x) = rx(1-x)$, se généralisent à des fonctions f réelles 3 fois dérivables sur $[0, 1]$, prenant leurs valeurs sur ce même segment et y possédant un maximum unique. Les constantes de Feigenbaum α et δ sont valides aussi pour cette classe de fonctions. On ne sait pas si ces constantes sont rationnelles, ni si elles sont algébriques. On conjecture généralement que ce sont des nombres transcendants.

Sur $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 2$, le chaos revêt des aspects plus complexes que pour $n = 1$. La littérature spécialisée décrit plusieurs cas classiques de chaos et d'attracteurs associés, ceux-ci présentant une structure fractale.

Problème 12.1 La suite logistique pour $r = 4$

On considère la suite logistique pour $r = 4$, donc définie par $x_{k+1} = f(x_k)$ avec $f(x) = 4x(1-x)$. On notera I le segment $[0, 1]$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout θ réel, on a $f^n(\sin^2 \theta) = \sin^2(2^n \theta)$, où f^n est la puissance n de f au sens de la composition.
2. On définit l'application « tente » t sur I par :

$$t(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, 1/2] \\ 2 - 2x & \text{si } x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

On appelle $\begin{cases} T \text{ le système défini par } x_{k+1} = t(x_k) \text{ sur } \Omega_T = I \\ L \text{ le système défini par la suite logistique sur } \Omega_L = I \end{cases}$

Montrer que ces deux systèmes sont conjugués par l'homéomorphisme $x \in \Omega_T \mapsto \psi(x) = \sin^2(\pi x/2) \in \Omega_L$.

3. Le **nombre de Champernowne** m a par définition une écriture binaire $m = 0, \dots$ dans laquelle les chiffres (donc 0 ou 1) après la virgule sont successivement :

- les 2 entiers de 0 à 1 écrits avec 1 chiffre, soit la suite 01 ;
- les 4 entiers de 0 à 3 écrits avec 2 chiffres, soit la suite 00011011 ;
- les 8 entiers de 0 à 7 écrits avec 3 chiffres, soit la suite :
000001010011100101110111, et ainsi de suite ;

On a donc $m = 0,010001101100000101001110010111011100000001 \dots$

Montrer que l'ensemble des parties fractionnaires (nombres moins leurs parties entières) des nombres $2^n m$ est dense sur I lorsque n décrit $\mathbb{N}$.

4. En déduire que pour $a = \sin^2(m\pi)$, l'orbite de a est dense dans I , puis que l'ensemble des points dont l'orbite est dense dans I est lui-même dense dans I .
5. À partir de l'analyse de l'équation $x_n = f^n(x_0) = x_0$, montrer que l'ensemble des points périodiques est dense dans I .

ANNEXE 1 : SYSTÈMES ET MÉCANIQUE CÉLESTE

L'alternance du jour et de la nuit ainsi que la ronde des saisons rythment depuis toujours la vie terrestre. L'Homme n'a pas tardé à reconnaître dans les phases de la Lune un troisième phénomène périodique ; les mots *lune* et *mois* ont d'ailleurs une racine commune dans de nombreuses langues. La mesure du temps en années, mois et journées s'est donc imposée dans la majorité des civilisations. Mais dès les temps préhistoriques, la curiosité humaine est allée au-delà, et s'est portée sur le mouvement de tous les astres visibles. Un survol des derniers millénaires montre à quel point la question de la dynamique céleste a façonné l'évolution de la physique et des mathématiques, tout particulièrement la théorie des systèmes dynamiques.

- Dans la civilisation grecque, on attribue le qualificatif d'errants aux astres qui se déplacent sur le fond des étoiles fixes. C'est l'étymologie du mot « planète ». La description de leur mouvement reste qualitative.
- Au IV^e siècle avant J.C., Eudoxe explique le mouvement apparent des astres par la cinématique de sphères homocentriques. La Terre est le centre de l'univers.
- Au II^e siècle avant J.C., Hipparque propose de décrire le mouvement des planètes autour de la Terre, toujours centre de l'univers, par un système complexe de cercles roulant sur d'autres cercles (épicycles). Ptolémée (II^e siècle après J.C.) perfectionne cette représentation. Sa précision acceptable lui donne une certaine capacité prédictive et lui assure un succès multiséculaire.
- En 1543, année de sa mort, Nicolas Copernic édite son « *de revolutionibus orbium coelestium* ». Il y argumente de façon très détaillée une nouvelle conception du monde, dont le centre est désormais le Soleil. Ce système se révèle plus simple et plus précis que celui de Ptolémée... mais fait perdre à la Terre son statut de centre du monde. Malgré les réactions hostiles que cette perte fait naître, la « révolution copernicienne » finira par s'imposer.
- Au début du XVII^e siècle, Képler, adepte du système héliocentrique, découvre que les planètes décrivent des ellipses autour du Soleil, selon trois lois bien précises.

- Au cours du même XVII^e siècle, survient bientôt une révolution plus radicale encore que la précédente : les travaux du jeune Isaac Newton permettent de retrouver les lois de Képler comme conséquences de principes simples et profonds, exprimés sous forme d'équations différentielles. Il s'agit des bases de la Mécanique et de la théorie de la gravitation universelle. Jointe à une approche nouvelle de l'optique, cette mathématisation vaut au recueil qui les réunit son titre « *Principia mathematicae Philosophia naturalis* ». Plus encore que par le passé, les mathématiques deviennent l'outil incontournable de la physique.
- Au XVIII^e siècle, de nombreux savants parmi lesquels Laplace, Lagrange, Euler, Poisson, approfondissent la mécanique newtonienne et développent la théorie des perturbations. Leurs avancées semblent montrer la stabilité du système solaire.
- À la fin du XIX^e siècle, toujours à partir de questions de mécanique céleste, Poincaré introduit les principaux concepts modernes de la théorie des systèmes dynamiques. Il perçoit la grande complexité des trajectoires dans l'« espace des phases », et compte ainsi parmi les précurseurs de la théorie du chaos.
- Albert Einstein, par la théorie de la relativité restreinte (1905) puis la décennie suivante par celle de la relativité générale, révolutionne la physique et permet de bâtir des modèles d'Univers. La modélisation de Newton reste toutefois un outil précis et précieux pour étudier l'évolution du système solaire. Si les travaux d'Einstein ne concernent pas les systèmes dynamiques, ils modifient leur modélisation dans le domaine de la mécanique céleste.
- En 1963, le météorologue Edward Lorenz du MIT se penche sur un phénomène de sensibilité aux conditions initiales. Il découvre ainsi le premier exemple d'attracteur étrange, qui fait progresser la compréhension du chaos.
- L'astronome français Jacques Laskar met à profit des simulations informatiques d'une grande précision pour montrer dès 1989 que la dynamique du système solaire devient imprévisible à long terme. Dans un avenir de quelques dizaines ou centaines de millions d'années, on ne peut exclure formellement des collisions entre planètes ! Sont concernées par ces possibles catastrophes dans un futur très lointain les quatre planètes telluriques : Mercure, Vénus, la Terre et Mars. L'avenir justifiera-t-il la crainte des Gaulois ?

ANNEXE 2 : TOPOLOGIE ET AUTRES STRUCTURES

Espaces topologiques

Définir une **topologie** sur un ensemble E , c'est définir l'ensemble $\mathcal{T}$ des **ouverts** de E . Une topologie $\mathcal{T}$ doit satisfaire les 3 axiomes suivants.

O_1 : toute union d'ouverts est un ouvert.

O_2 : l'intersection de deux ouverts est un ouvert.

O_3 : l'ensemble vide ϕ et l'ensemble plein E sont des ouverts.

On dit que E muni d'une topologie est un **espace topologique**.

Sur $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \dots, \mathbb{R}^n$, il existe une topologie dite usuelle pour laquelle les « intervalles ouverts » (sur $\mathbb{R}$), « disques ouverts » (sur $\mathbb{R}^2$), etc. sont des ouverts au sens axiomatique précédent, ce qui justifie les qualificatifs qui leur ont été donnés en géométrie élémentaire. La topologie usuelle est la plus naturelle des topologies non-triviales de $\mathbb{R}^n$, donc la plus largement utilisée.

En revanche, sur les espaces de dimension infinie que nécessite l'analyse fonctionnelle (en l'occurrence les espaces fonctionnels : espace des polynômes, espace des fonctions continues, etc.), il y a plusieurs topologies non-triviales intéressantes, comme le décrivent les ouvrages d'analyse fonctionnelle.

Pour définir une topologie sur un ensemble E , il n'est nul besoin que E soit muni d'une autre structure (groupe, anneau, espace vectoriel, etc.).

La structure d'espace topologique est le cadre naturel de définition de nombreuses notions dont celles de limite et de continuité.

La **continuité** sur un espace topologique se définit au moyen de la notion de voisinage : on appelle **voisinage** d'un point a d'un espace topologique E un ensemble contenant un ouvert contenant a . Notant par $V(x)$ un voisinage de x , on pose la définition générale : la fonction f de E dans F topologiques est **continue en a** si et seulement si $\forall V[f(a)], \exists V(a)$ tel que $\forall x \in E, x \in V(a) \implies f(x) \in V[f(a)]$. Cette définition est plus générale que la définition : quel que soit ε , il existe η , etc., qui recourt à une distance, donc à une structure métrique (objet de la rubrique suivante).

Remarque

Comme tout voisinage de a contient un ouvert contenant a , on ne modifie en rien la définition de la continuité en imposant que $V(a)$ soit ouvert.

On dit que f de E dans F est **continue sur E** si f est continue en tout point de E .

Une bijection f entre deux espaces topologiques E et F est un **homéomorphisme** si elle est bicontinue, c'est-à-dire si f et f^{-1} sont continues. Si tel est le cas, on dit que E et F sont homéomorphes. Deux ensembles homéomorphes partagent leurs propriétés topologiques (notions d'ouverts, fermés, compacts, connexité). Par exemple,

le flacon et l'œuf (considérés dans leur volume et non comme surfaces) sont homéomorphes. De même, la tasse et la galette sont homéomorphes ; elles ont chacune un « trou ».

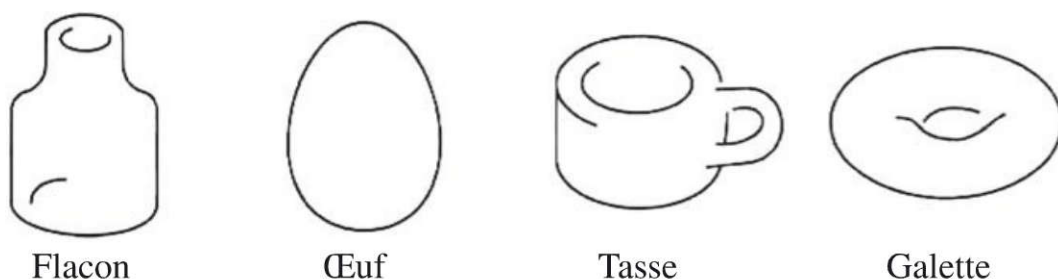


Figure 13.1 - Deux couples d'ensembles homéomorphes.

Les deux premiers ensembles sont homéomorphes à la boule $\|x\| \leq 1$ de $\mathbb{R}^3$, les deux derniers au tore euclidien en tant que volume, ensemble des points de l'espace situés à une distance au plus r d'un cercle de rayon $R > r$. Aucun des deux premiers ensembles n'est homéomorphe à aucun des deux derniers.

La notion d'homéomorphisme sert pour définir celle de variété (fin de la présente annexe), elle-même incontournable pour décrire des espaces des états autres que $\mathbb{R}^n$.

Un homéomorphisme entre ouverts de $\mathbb{R}^{n_1}$ et $\mathbb{R}^{n_2}$ n'existe que si $n_1 = n_2$.

Mais quels que soient n_1 et n_2 , il existe des bijections simplement continues et dont l'application réciproque ne l'est pas nécessairement : on pensera par exemple à la courbe de Hilbert, qui applique bijectivement un segment sur un carré.

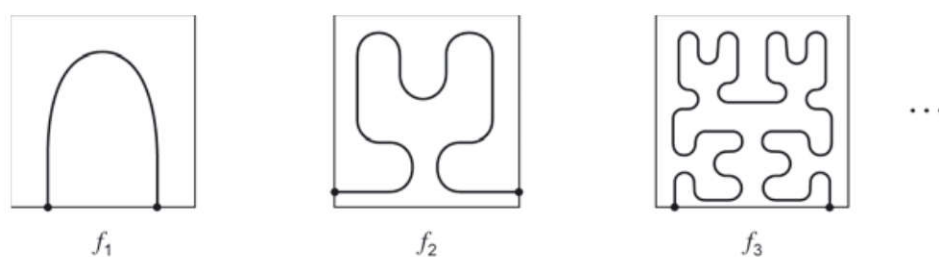


Figure 13.2 - Construction de la courbe de Hilbert.

$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ est une fonction continue de $[0, 1]$ sur $[0, 1]^2$. Ce résultat montre pourquoi la conjugaison (§ 2.2.1) n'est possible qu'entre espaces de même dimension.

Espaces métriques

La notion de distance introduite dès l'école primaire en géométrie élémentaire se généralise de manière axiomatique sur un ensemble *a priori* quelconque.

Une **distance** sur un ensemble E quelconque est une application d de $E \times E$ dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant les trois axiomes :

$$\mathcal{D}_1 : d(x, y) = 0 \text{ si et seulement si } x = y ;$$

$$\mathcal{D}_2 : \text{pour tous } x \text{ et } y \text{ éléments de } E : d(x, y) = d(y, x) ;$$

$$\mathcal{D}_3 : \forall x, y, z, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \text{ (inégalité triangulaire).}$$

Une distance est aussi appelée **métrique**. E muni de d est un **espace métrique**, qu'on notera (E, d) ou simplement E . Sans surprise, la distance au sens élémentaire (distance euclidienne) dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ satisfait les trois axiomes. On généralise sans difficulté cette notion à $\mathbb{R}^n$.

La **boule ouverte** $\mathcal{B}(x, r)$ de centre x et de rayon $r > 0$ est l'ensemble $\{y \in E, d(x, y) < r\}$. On montre que l'ensemble $\mathcal{T}$ des réunions de boules ouvertes, complété par l'ensemble vide $\emptyset$ **est une topologie** (une boule ouverte est un ouvert, ce qui justifie *a posteriori* la terminologie). À une structure métrique correspond donc une topologie : $\mathcal{T}$ est la **topologie associée à d** .

La distance entre deux parties A et B de E est $d(A, B) = \inf\{d(x, y) ; x \in A, y \in B\}$. En particulier, pour $a \in E$, $d(a, B) = \inf\{d(a, y) ; y \in B\}$.

Espaces vectoriels normés

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. L'application $x \in E \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}^+$ est une **norme** si et seulement si les trois propriétés suivantes sont satisfaites :

$$\mathcal{N}_1 : \|x\| = 0 \iff x = 0 ;$$

$$\mathcal{N}_2 : \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}, \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| ;$$

$$\mathcal{N}_3 : \forall x, y \in E \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ (inégalité triangulaire).}$$

Muni de $\|\cdot\|$, E est un **espace vectoriel normé** (on notera en abrégé e.v.n.).

On dit que les deux normes $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_b$ sont **équivalentes** si et seulement si il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ tels que, pour tout $x \in E$:

$$\alpha \cdot \|x\|_a \leq \|x\|_b \leq \beta \cdot \|x\|_a$$

L'adjectif « équivalentes » est justifié par le fait que la relation définie entre les deux normes est une relation d'équivalence.

On montre que **sur $\mathbb{R}^n$, toutes les normes sont équivalentes**.

Ce résultat **n'est plus valable** dans un espace de dimension infinie ; sur un espace fonctionnel, il est donc nécessaire de préciser la norme utilisée.

Par exemple, sur $E = C[0, 1]$, ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$:

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx \text{ et } \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| \text{ sont deux normes non équivalentes.}$$

- Soit E un espace vectoriel normé

L'application $(x, y) \in E^2 \mapsto d(x, y) = \|x - y\|$ est une **distance**.

Les trois propriétés $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ sont en effet des conséquences directes des propriétés des normes $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3$.

La distance ainsi définie est dite **associée à la norme $\|\cdot\|$**

De même que les espaces métriques sont des cas particuliers d'espaces topologiques, les e.v.n. sont des cas particuliers d'espaces métriques.

Espaces préhilbertiens

E étant un espace vectoriel de dimension finie ou infinie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, une forme **sesquilinéaire** sur E est une application de $E \times E$ sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ linéaire pour l'un des arguments et antilinéaire (c'est-à-dire additive et telle que $f(\lambda x) = \bar{\lambda} f(x)$) pour l'autre.

Si le corps est $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: sesquilinéaire = bilinéaire.

Une forme **hermitienne** est une application φ de $E \times E$ sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ telle que pour tous x et y : $\varphi(y, x) = \overline{\varphi(x, y)}$.

Si le corps est $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: hermitienne = symétrique.

Un **produit scalaire** sur l'espace vectoriel E est une forme sesquilinéaire hermitienne définie positive sur E . Remarquons simplement que si le corps des scalaires est $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, une forme sesquilinéaire hermitienne est une forme bilinéaire symétrique. Le produit scalaire de x et y est noté $(x|y)$. D'autres notations sont pratiquées.

Un **espace préhilbertien** est un espace vectoriel E sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni d'un produit scalaire. Si la dimension de E est finie, E est dit :

- **euclidien** si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$;
- **hermitien** si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

On notera les deux sens de l'adjectif hermitien, selon qu'il qualifie une forme ou un espace.

- Soit E un espace préhilbertien

L'application $x \in E \mapsto \|x\| = (x, x)^{1/2}$ est une **norme**.

Les trois propriétés $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3$ se déduisent en effet des propriétés du produit scalaire ; la démonstration, classique, est faite en classes préparatoires.

La norme ainsi définie est dite **associée au produit scalaire $\|\cdot\|$**

Ainsi, de même que les e.v.n. sont des cas particuliers d'espaces métriques, les espaces préhilbertiens sont des cas particuliers d'e.v.n.

Sur un espace préhilbertien, tout couple (x, y) satisfait l'**inégalité de Cauchy-Schwarz** : $|(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

Un espace métrique E est **complet** si toute suite de Cauchy de E converge dans E .

Un **espace de Hilbert** est un espace préhilbertien complet.

Résumons les relations entre types d'espaces précédemment définis :

- tout espace hilbertien est un espace préhilbertien ;
- tout espace préhilbertien est un e.v.n. ;
- tout e.v.n. est un espace métrique ;
- tout espace métrique est un espace topologique.

Variétés

Un cercle n'est pas une partie de la droite réelle, mais chacun de ses points possède un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}$. De même, une sphère n'est pas une partie du plan, mais chacun de ses points possède un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Le cercle (resp. la sphère) a localement les mêmes propriétés topologiques que $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{R}^2$). On dira que le cercle est une **variété topologique** de dimension 1, et que la sphère est une variété topologique de dimension 2. Nous allons détailler cette définition.

Variétés de dimension n

Une variété de dimension n est un espace topologique V que l'on peut couvrir de cartes de même dimension n qui se raccordent convenablement. Précisons cet énoncé :

- une **carte** est un couple (U, φ) , U étant un ouvert de V et φ un homéomorphisme de U sur un ouvert $W = \varphi(U)$ de $\mathbb{R}^n$.
- Un **atlas** est une famille $(U_i)_{i \in I}$ de cartes telle que $\bigcup_{i \in I} U_i = V$. Pour tout couple (i, j) tel que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, soit $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ l'application de changement de carte. Si toutes ces applications sont :
 - continues, V est une **variété topologique** de dimension n ;
 - différentiables de classe C^p , V est une **variété différentiable** de dimension n et de classe C^p . On peut dire indifféremment **variété différentiable**.

Exercice 13.1 Un atlas du cercle

Le quotient de $\mathbb{R}$ par la relation d'équivalence $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}$ est topologiquement le cercle, ou tore à une dimension, que l'on notera T^1 .

On remarquera que pour cette définition du cercle, il n'est pas nécessaire de connaître la notion de plan, et qu'il est donc a fortiori inutile de savoir ce qu'est un plan euclidien.

On munit T^1 de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$ via l'équivalence $\sim$. Ainsi (voir les cours de topologie), les ouverts de T^1 ont pour représentants dans $[0, 1[$ les réunions d'ouverts de ces deux catégories :

- ne contenant pas 0, du type $]a, b[$ avec $0 \leq a \leq b \leq 1$ (pour $a = b$: ouvert vide) ;
- contenant 0, du type $[0, a[\cup]b, 1[$, avec $0 < a \leq b < 1$.

On définit sur T^1 les deux cartes :

- $U_1 =]0, 1[\subset T^1$ avec $\varphi_1(x \in U_1) \in \mathbb{R}$;
- $U_2 = [0, \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, 1[\subset T^1$ avec $\varphi_2(x \in U_2) \in \mathbb{R}$.

Montrer qu'on peut définir φ_1 et φ_2 telles que, muni de l'atlas correspondant, T^1 soit une variété différentiable de dimension 1 et de classe C^∞ .

Exercice 13.2 Un atlas du tore

Le tore à deux dimensions T^2 est le produit cartésien d'un cercle (qui est aussi le tore T^1 à une dimension) par lui-même : $T^2 = T^1 \times T^1$. C'est aussi le quotient de $\mathbb{R}^2$ par la relation d'équivalence $(x, x') \sim (y, y') \iff (x - y, x' - y') \in \mathbb{Z}^2$, ce qui permet de désigner un élément de T^2 par son représentant de $[0, 1[\times [0, 1[\subset \mathbb{R}^2$. Exemples de tores T^2 : la bouée de sauvetage, le pneu de voiture (en tant que surfaces). T^2 est évoqué au § 8.5 sous la notation T .

De même que la définition du plan n'était pas nécessaire à celle du cercle en tant que variété, celle de l'espace $\mathbb{R}^3$ n'est pas nécessaire à celle du tore T^2 .

on définit sur T^2 l'atlas formé des deux cartes :

- $U_1 =]0, 1[\times T^1 \subset T^2$ avec $\varphi_1((x, y) \in T^2) \in \mathbb{R}^2$;
- $U_2 = [0, \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, 1[\times T^1 \subset T^2$ avec $\varphi_2((x, y) \in T^2) \in \mathbb{R}^2$.

Montrer qu'on peut définir φ_1 et φ_2 telles que, muni de l'atlas correspondant, T^2 soit une variété différentiable de dimension 2, et de classe C^∞ .

(On se limitera à décrire la démarche, sans nécessairement donner une expression analytique des φ_i).

Calcul différentiel sur une variété

Comment étendre à une variété différentielle la notion d'équation d'évolution ? Quand x est un point de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, on sait donner un sens à l'équation $\dot{x} = f(x)$. Pour toute fonction $g(t)$ à valeur dans $\mathbb{R}^n$ (et en particulier pour le flot $t \mapsto x(t) = \phi(t, x_0)$), la dérivée $\frac{dg}{dt}(t_0)$ s'obtient classiquement comme limite de $\frac{g(t_0 + h) - g(t_0)}{h}$ quand $h \rightarrow 0$. Mais si la différence $g(t_0 + h) - g(t_0)$ a un sens quand g prend ses valeurs dans un espace vectoriel, elle n'en a plus quand g prend ses valeurs sur une variété. Or, l'exemple élémentaire de la vitesse angulaire, dérivée temporelle d'un angle (élément de la variété $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ de dimension 1), nous fait pressentir qu'une dérivation demeure possible sur une variété.

On pourrait certes identifier le cercle, variété de dimension 1, à un cercle du plan euclidien ; on réhabilite ainsi la différence, mais celle-ci, donc aussi la dérivée qu'elle permet de définir, peut prendre n'importe quelle valeur dans $\mathbb{R}^2$. Si cette identification était pertinente, la vitesse angulaire serait un vecteur de $\mathbb{R}^2$.

Il existe un autre inconvénient : une variété de dimension n peut être considérée comme plongée dans $\mathbb{R}^m$, avec m suffisamment grand et au moins égal à n . Mais le plongement peut être beaucoup moins trivial que celui utilisé pour le cercle. Si on ne recourt pas à cet artifice, on parle de variété abstraite. Dans ce cas général, il faut donc opérer différemment.

Effectivement, définir sur une variété les notions de dérivation, d'espace tangent et de champ de vecteurs, donc légitimer des équations d'évolution du type $\dot{x} = f(x)$ est toujours possible mais exige un certain formalisme. Comme celui-ci n'est pas indispensable à la compréhension du présent ouvrage, nous renvoyons le lecteur à l'abondante littérature sur les variétés et/ou la géométrie différentielle. Nous signalons néanmoins deux approches qui servent à construire un calcul différentiel sur les variétés. Nous nous plaçons dans le cas d'une variété V de dimension n et de classe C^∞ .

– Vecteur tangent à une variété

Un chemin ou courbe sur la variété V est une application α de $I =]-1, +1[$ dans V : $t \in I \mapsto \alpha(t) \in V$. Pour toute carte (U, φ) telle que $\alpha(I)$ rencontre U , on suppose α de classe C^∞ , c'est-à-dire : les n coordonnées de $\alpha(t)$ dans la carte (U, φ) sont des fonctions réelles de classe C^∞ . On considère les courbes passant par $a \in V$, le point a correspondant à la valeur 0 de la variable t . Deux telles courbes α et β , pour lesquelles on a donc $\alpha(0) = \beta(0) = a$, sont dites *équivalentes* si pour toute carte (U, φ) telle que $a \in U$, les deux fonctions vectorielles $t \in \mathbb{R} \mapsto (\varphi \circ \alpha)(t) \in \mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R} \mapsto (\varphi \circ \beta)(t) \in \mathbb{R}^n$ ont la même dérivée (qui est donc un vecteur de $\mathbb{R}^n$) pour $t = 0$. On montre que cette relation est une relation d'équivalence, et que l'ensemble des classes peut être muni d'une structure d'espace vectoriel.

Une classe apparaît ainsi comme un **vecteur tangent** à V en a , l'ensemble de ces vecteurs étant l'**espace tangent** en a à V . Cet espace est naturellement de dimension n , et est attaché au point a .

– **Dérivation sur une variété**

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions f définies dans un voisinage de $a \in V$ et indéfiniment dérivables de V dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire : pour toute carte (U, φ) , l'application $x \in \mathbb{R}^n \mapsto (f \circ \varphi^{-1})(x) \in \mathbb{R}$ est de classe C^∞ . Cet ensemble possède la structure d'algèbre. Il est en particulier stable par multiplication. Une application D de $\mathcal{F}$ dans lui-même est dite une **dérivation** si pour tous f et g appartenant à $\mathcal{F}$, on a $D(f.g) = f.D(g) + g.D(f)$ au point a . Cette égalité est formellement la **relation de Leibniz**. On montre que l'ensemble des dérivations en a peut être muni d'une structure d'espace vectoriel. L'ensemble des vecteurs est l'**espace tangent** en a à V .

Il est remarquable que, comme le montrerait un complément d'analyse de la question, les deux définitions de l'espace tangent en a à V que nous avons données sont *équivalentes*.

ANNEXE 3 : THÉORÈME DE CAUCHY ET DÉTERMINISME

Le **théorème de Cauchy-Lipschitz** est classique et enseigné en premier cycle universitaire. Il est connu aussi sous le nom de théorème de Cauchy, parfois sous le nom de **théorème de Picard-Lindelöf**.

Vieux de 2 siècles environ (le premier énoncé, dû à Cauchy, date de 1820), il établit dans des conditions très générales l'existence et l'unicité de la solution d'une équation différentielle. Il se révèle donc incontournable dans l'étude des systèmes dynamiques à temps continu, dont l'évolution est justement traduite par une équation différentielle dans $\mathbb{R}^n$.

Théorème de Cauchy

Soient E et F deux espaces métriques, munis des distances respectives d et δ . Une application f de E dans F est dite **lipschitzienne de rapport k** ($k \in \mathbb{R}_+$) si pour tous x et y éléments de E , on a : $\delta(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y)$. On dit aussi que f est k -lipschitzienne.

f est dite **localement lipschitzienne** si tout point x de E possède un voisinage sur lequel f est lipschitzienne : le rapport k dépend *a priori* de x . Par exemple, sur $E = \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto \sqrt{x}$ est localement lipschitzienne, mais l'ensemble des k n'est pas borné : il n'existe donc pas de k tel que f soit k -lipschitzienne sur E .

Le **théorème de Cauchy-Lipschitz**, objet du § 1.2.1, s'énonce ainsi :

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Soit (E) l'équation différentielle $\dot{x} = f(x)$, où f est une fonction localement lipschitzienne sur un domaine Ω de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Alors, pour tout $x_0 \in \Omega$, il existe une solution maximale unique de (E) définie sur un intervalle de temps ouvert contenant 0 et telle que $x(0) = x_0$.

Par « solution maximale », il faut entendre : solution définie sur un intervalle de temps $J(x_0)$ ouvert contenant 0, et non prolongeable au-delà de cet intervalle.

Pour les systèmes linéaires, $\Omega = \mathbb{R}^n$ et $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, $J(x_0) = \mathbb{R}$.

Déterminisme

Le théorème de Cauchy donne un sens précis au déterminisme : la double connaissance du présent (l'état x_0) et de la loi d'évolution d'un système (la fonction f) permet de déterminer le futur ($x(t)$ pour $t > 0$), mais aussi le passé car $J(x_0)$ est un ouvert contenant 0. Si le système est l'univers entier, le fait qu'aucune grandeur physique ne

puisse devenir infinie assure que l'intervalle temporel maximal n'est pas limité dans le futur. Dès lors, une fois connues les lois de la physique, la connaissance parfaite du présent détermine rigoureusement l'avenir.

On peut aussi dire que dans le cadre d'une loi d'évolution donnée (la fonction f), les mêmes causes (les conditions initiales) produisent les mêmes effets.

De façon équivalente, on peut encore énoncer qu'avec des hypothèses convenables, un présent n'a qu'un futur possible.

Ce déterminisme est parfois appelé **déterminisme laplacien**. Il est clairement décrit dans ce texte célèbre de Pierre-Simon de Laplace (1749-1827), extrait de son « *Essai philosophique sur les probabilités* » (1814) :

« Nous devons envisager l'état présent de l'univers comme l'effet de son état antérieur, et comme la cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé, serait présent à ses yeux. L'esprit humain offre, dans la perfection qu'il a su donner à l'astronomie, une faible esquisse de cette intelligence. Ses découvertes en mécanique et en géométrie, jointes à celles de la pesanteur universelle, l'ont mis à portée de comprendre dans les mêmes expressions analytiques les états passés et futurs du système du monde. En appliquant la même méthode à quelques autres objets de ses connaissances, il est parvenu à ramener à des lois générales les phénomènes observés, et à prévoir ceux que les circonstances données doivent faire éclore. »

Dans sa réflexion sur le déterminisme, Laplace a été précédé par Paul-Henri Thiry, baron d'Holbach (1723-1789). Ce scientifique et philosophe d'origine allemande et d'expression française écrivait en effet dès 1770 dans son « *Système de la nature* » :

« Dans un tourbillon de poussière qu'élève un vent impétueux, quel qu'il paraisse à nos yeux, dans la plus affreuse tempête excitée par des vents opposés qui soulèvent les flots, il n'y a pas une seule molécule de poussière ou d'eau qui soit placée au hasard, qui n'ait sa cause suffisante pour occuper le lieu où elle se trouve, et qui n'agisse rigoureusement de la manière dont elle doit agir. Un géomètre qui connaîtrait exactement les différentes forces qui agissent dans les deux cas, et les propriétés des molécules qui sont mues, démontrerait que, d'après les causes données, chaque molécule agit précisément comme elle doit agir, et ne peut agir autrement qu'elle ne fait. »

Les limites du déterminisme scientifique

Même dans sa formulation scientifique, hors de toute science humaine, la notion de déterminisme connaît des limites :

- Les limites posées par la physique : ironie de l'histoire, dans ces extraits, Laplace et Holbach parlent d'« atomes » et de « molécules »... et nous savons bien depuis le début du XX^e siècle que le comportement de ces constituants de la matière est régi par la mécanique quantique, par essence probabiliste, donc non déterministe.
- Les limites posées par les mathématiques : n'oublions pas que le théorème de Cauchy n'est pas nécessairement valable si f n'est pas localement lipschitzienne. Plus précisément, on peut donner des exemples simples ($f(x) = \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$) pour lesquels un présent donné x_0 peut conduire à une infinité de futurs $x(t)$ possibles.

ANNEXE 4 : RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

Matrices semblables dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$

Deux matrices A et B sont **semblables** si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases (éventuellement identiques) de E .

Cette définition intrinsèque équivaut à la définition opératoire suivante :

A et B sont semblables si et seulement si il existe une matrice P inversible telle que $B = P^{-1}AP$.

La relation « A est semblable à B », que nous noterons $A \sim B$, est une relation :

- réflexive car $A = I^{-1}AI$, où I est la matrice identité ;
- symétrique : $A \sim B \implies B = P^{-1}AP$
 $\implies A = PBP^{-1} = Q^{-1}BQ$, avec $Q = P^{-1}$
 $\implies B \sim A$
- transitive : $A \sim B \implies B = P^{-1}AP$
 $B \sim C \implies C = Q^{-1}BQ = Q^{-1}P^{-1}APQ$
 $= (PQ)^{-1}A(PQ)$, d'où $A \sim C$

En conclusion : *la similitude des matrices est une relation d'équivalence.*

Remarques

1. Si A et B sont semblables, le fait qu'elles se rapportent au même endomorphisme implique qu'elles ont les mêmes valeurs propres et vecteurs propres.
 Noter que l'identité des spectres n'implique pas la similitude. Ainsi, sur $\mathbb{R}^2$, les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ont la même valeur propre double 1 mais ne sont pas semblables : la première est semi-simple, la seconde non.
2. Pour certains résultats, la définition opératoire de la similitude est préférable à la définition intrinsèque. Par exemple, si A et B sont semblables, $B = P^{-1}AP$ implique l'égalité des déterminants, qui implique elle-même $\det A = \det B$. La réciproque est fausse : la remarque 1 fournit un contre-exemple.
3. La similitude ne conserve pas la symétrie d'une matrice (sinon, on pourrait définir la notion d'endomorphisme symétrique, ce qui n'est pas possible hors structure euclidienne, contrairement à la notion de forme bilinéaire symétrique).
 Par exemple, sur $\mathbb{R}^2$ la projection sur le vecteur e_1 parallèlement à e_2 est représentée dans la base (e_1, e_2) par la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui est symétrique. En revanche, dans la base $(e_1, e_1 + e_2)$, elle se traduit par la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui n'est pas symétrique.

Réduction des endomorphismes semi-simples

La réduction d'un endomorphisme *semi-simple* (c'est-à-dire diagonalisable sur $\mathbb{C}$) d'espace vectoriel réel donne lieu au résultat suivant.

Une matrice *réelle semi-simple* (c'est-à-dire diagonalisable sur $\mathbb{C}$) est semblable à une matrice réelle diagonale par blocs, de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & \lambda_k & & 0 \\ 0 & & \Lambda_{k+1} & 0 \\ & & & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda_q \end{pmatrix}, \text{ où } \Lambda_j = \begin{pmatrix} \mu_j & -\omega_j \\ \omega_j & \mu_j \end{pmatrix}$$

- Les λ_j sont les valeurs propres réelles de A ;
- Les $\mu_j \pm i\omega_j$ sont les valeurs propres complexes conjuguées de A .

Remarques

1. À chaque λ_i on associe un sous-espace propre E_i de dimension égale au nombre d'apparitions de λ_i . De même, on associe à chaque Λ_i un sous-espace E_i stable par A , dont la dimension est égale au nombre d'apparitions de Λ_i multiplié par deux. Tous les E_i sont stables par A , et leur somme directe est E : $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_q$: on a effectué la **décomposition spectrale de A** .
2. On a la formule utile suivante, déjà citée au paragraphe 2.2.3 :

$$\text{Si } \Lambda = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \text{ alors } e^\Lambda = e^a \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}$$

3. Si l'endomorphisme A a n valeurs propres réelles distinctes, alors il est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. On a $k = n$, et $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Rappels sur les matrices nilpotentes

Tout endomorphisme n'est pas semi-simple, nous allons en donner deux exemples préliminaires, dont le premier a déjà été rencontré. Ils montrent l'importance des matrices nilpotentes.

Premier exemple : la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de la « transformation du relieur » (§ 4.1) s'obtient en ajoutant à la matrice unité I la matrice **nilpotente** (c'est-à-dire de carré nul) $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. À l'unique valeur propre 1 correspond un sous-espace propre de dimension 1.

Deuxième exemple : la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ possède comme valeur propre triple $\lambda = 2$. L'espace propre correspondant, généré par le vecteur $(1, 0, 0)^t$, est de dimension 1. A n'est diagonalisable ni dans $\mathbb{C}$ ni dans $\mathbb{R}$. Ici, $A = 2 \cdot I + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_N$, avec

$N^2 \neq 0$ et $N^3 = 0$: on dit que N est **nilpotente d'ordre 3**.

Les constatations sur la nilpotence faites à partir de ces deux exemples se généralisent :

La matrice $N = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}}_{n \times n}$ est **nilpotente d'ordre p** , car $N^{p-1} \neq 0$ et $N^p = 0$.

Ceci se déduit de l'interprétation de l'endomorphisme N : chaque vecteur de base e_j devient e_{j-1} , sauf e_1 qui devient 0.

Remarques

1. Toute matrice $p \times p$ nilpotente d'ordre p est semblable à une matrice du type N ci-dessus.

L'idée de la démonstration est la suivante : si N est nilpotente d'ordre n , alors il existe x dans E tel que $N^{p-1}x \neq 0$ (sinon N serait nilpotente d'ordre au plus $p-1$). On montre alors que le système $x, Nx, \dots, N^{p-1}x$ est libre : il constitue une base dans laquelle l'endomorphisme nilpotent a la forme indiquée.

2. Multiplier une matrice $p \times p$ quelconque par N à gauche revient à décaler toutes ses lignes d'un rang vers le haut, la dernière étant remplacée par des 0.

De même, multiplier une matrice $p \times p$ quelconque par N à droite revient à décaler toutes ses colonnes d'un rang vers la droite, la première étant remplacée par des 0.

3. Si A est un endomorphisme nilpotent d'ordre k , alors $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|e^{At}\|}{t^k} = 0$,

car $e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{A^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!}$, tous les autres termes étant nuls.

Donc, $\frac{e^{At}}{t^k} = \frac{I}{t^k} + \frac{A}{t^{k-1}} + \dots + \frac{A^{k-1}}{(k-1)!t}$, qui tend vers 0 quand $t \rightarrow \infty$.

Réduction des endomorphismes quelconques

Les matrices nilpotentes apparaissent dans le théorème de réduction d'un endomorphisme quelconque d'espace vectoriel réel. Le résultat est le suivant ; la forme A indiquée est appelée **réduite de Jordan** de la matrice initiale :

Une matrice *réelle quelconque* est semblable à une matrice réelle diagonale par blocs, de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & J_k & & 0 \\ 0 & & K_{k+1} & 0 \\ & & & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & K_q \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix} \text{ et } K_j = \begin{pmatrix} \Lambda_j & I & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & I \\ 0 & & & \Lambda_j \end{pmatrix}$$

$$\text{où } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \Lambda_j = \begin{pmatrix} \mu_j & -\omega_j \\ \omega_j & \mu_j \end{pmatrix}$$

- Les λ_i sont les valeurs propres réelles de A ;
- Les $\mu_j \pm i\omega_j$ sont les valeurs propres complexes conjuguées de A .

Remarques

1. Une même valeur propre λ peut apparaître dans plusieurs blocs J_i . De même, un couple donné $\mu \pm i\omega$ de valeurs propres complexes conjuguées peut apparaître dans plusieurs blocs K_j ; les blocs J_i ou K_j sont appelés **blocs de Jordan**.
2. Les J_i (resp. les K_j) de dimension 1 (resp. 2) sont simplement les scalaires λ_i (resp. les matrices Λ_j).
3. Les J_i de dimension au moins égale à 2 ont une surdiagonale formée de « 1 », et on a :

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

La dernière matrice est nilpotente d'ordre « nombre de 1 » + 1.

4. Les K_j de dimension au moins égale à 4 ont une surdiagonale formée de « I », et on a :

$$K_j = \begin{pmatrix} \Lambda_j & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Lambda_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & \ddots & I \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

La dernière matrice est nilpotente d'ordre « nombre de I » + 1 ; elle opère un décalage sur les blocs 2×2 .

ANNEXE 5 : DEUX COMPLÉMENTS MATHÉMATIQUES

Un rappel d'analyse complexe

Soit A un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de polynôme caractéristique $P(z)$, et λ une racine de $P(z)$, d'ordre de multiplicité k . Alors, $P(z) = (z - \lambda)^k Q(z)$, où $Q(z)$ est un polynôme tel que $Q(\lambda) \neq 0$. On a $P'(z) = k(z - \lambda)^{k-1} Q(z) + (z - \lambda)^k Q'(z)$.

La fonction $\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{k}{z - \lambda} + \frac{Q'(z)}{Q(z)}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ privé des racines de P .

On a : $\text{Res} \left\{ \frac{k}{z - \lambda} + \frac{Q'(z)}{Q(z)} ; \lambda \right\} = \text{Res} \left\{ \frac{k}{z - \lambda} ; \lambda \right\}$ (Res désigne le résidu)

car $Q(\lambda) \neq 0 \implies \text{Res} \left\{ \frac{Q'(z)}{Q(z)} ; \lambda \right\} = 0$. Par conséquent, $\text{Res} \left\{ \frac{P'}{P} ; \lambda \right\} = k$.

Considérons maintenant un contour Γ frontière d'un domaine comprenant ν racines $\lambda_1, \dots, \lambda_\nu$ de P (avec donc $0 \leq \nu \leq n$). Alors, le théorème des résidus implique, pour Γ satisfaisant les hypothèses de ce théorème :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{P'(z)}{P(z)} dz = k_1 + \dots + k_\nu$$

où k_i est l'ordre de multiplicité de λ_i

Un lemme d'algèbre

Soit A un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors :

Lemme d'encadrement

Une condition nécessaire et suffisante pour que la partie réelle de toute valeur propre de A appartienne au segment réel $]a, b[$ est qu'il existe une norme euclidienne $\| \cdot \|$ sur E telle que $\forall x \in E, a \|x\|^2 < (Ax | x) < b \|x\|^2$.

Condition suffisante $\implies$

La démonstration qui suit est assez technique. On pourra en première lecture se limiter aux deux premiers cas, qui sont plus intuitifs que les suivants.

Plaçons nous dans l'un des sous-espaces E_i stables par A évoqués dans ce livre. La base de E_i dans laquelle A est sous forme réduite (annexe 4) est choisie orthonormée, ce qui détermine une structure euclidienne dans E_i . Nous appellerons B la restriction de A à E_i .

1^{er} cas : B est semi-simple et E_i est associé à une valeur propre réelle λ .

Alors, notant $(\cdot | \cdot)$ le produit scalaire dans E_i , on a :

$$(Bx | x) = (\lambda x | x) = \lambda(x | x) = \lambda \|x\|^2$$

et la propriété s'en déduit.

2^e cas : B est semi-simple et E_i est associé à un couple de valeurs propres complexes $\mu \pm i\omega$. Alors, désignant par R la rotation d'angle $+\pi/2$, on a :

$$B = \mu I + \omega R, \text{ d'où } (Bx | x) = (\mu x + \omega R x | x) = \mu \|x\|^2 \text{ et la propriété en découle.}$$

3^e cas : B est un bloc de Jordan de dimension $p > 1$ associé à une valeur propre réelle λ . Soit $(u) = (u_1, u_2, \dots)$ la base de E_i dans laquelle B est sous forme réduite de Jordan. On définit la nouvelle base (v) par $v_k = \varepsilon^{k-1} u_k$ ($k = 1$ à p) avec $\varepsilon > 0$.

Prenons $p = 3$ pour alléger les notations. Dans la base (u) , $B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

La matrice de changement de base de (u) vers (v) est : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix}$ et la matrice

de l'endomorphisme dans la base (v) est donc $B' = P^{-1} B P = \begin{pmatrix} \lambda & \varepsilon & 0 \\ 0 & \lambda & \varepsilon \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Ce résultat

vaut pour tout p : B' est constituée d'une diagonale de « λ » et d'une surdiagonale de « ε » : dans E_i , $B' = \lambda I + N$ où I est la matrice unité de dimension $p \times p$ et N la matrice nilpotente composée d'une surdiagonale de « epsilon » et complétée par des zéros. Avec la structure euclidienne rendant (v) orthonormée, on a :

$$(B'x | x) = (\lambda I x | x) + (N x | x) = \lambda \|x\|^2 + (N x | x)$$

Prenons pour toute matrice M la norme $\|M\| = \sup_{\|x\|=1} \|M \cdot x\|$, où $\|x\|$ et $\|M \cdot x\|$ désignent les normes de x et $M \cdot x$ dans la structure euclidienne adoptée.

Alors, $\|N\| = \varepsilon$ et, dans E_i :

$$\begin{aligned} |(N x | x)| &\leq \|N x\| \cdot \|x\| && \text{(inégalité de Cauchy-Schwarz)} \\ &\leq \|N\| \cdot \|x\| \cdot \|x\| && \text{(propriété de } \|N\|) \\ &\leq \|N\| \cdot \|x\|^2 \end{aligned}$$

Comme $\|N\| = \varepsilon$, on a $(N x | x) = \theta \|x\|^2$, avec $\theta \in]-\varepsilon, +\varepsilon[$

Comme $\lambda \in]a, b[$, il existe $\alpha > 0$ tel que $a + \alpha < \lambda < b - \alpha$. On a donc, par transformation affine de cette inégalité :

$$a \|x\|^2 + (Nx | x) + \alpha \|x\|^2 < \underbrace{\lambda \|x\|^2 + (Nx | x)}_{(B'x | x)} < b \|x\|^2 + (Nx | x) - \alpha \|x\|^2$$

$$\text{d'où } (a + \theta + \alpha) \cdot \|x\|^2 < (B'x | x) < (b + \theta - \alpha) \cdot \|x\|^2$$

Or ε , donc aussi $|\theta|$, peut être choisi arbitrairement faible. Pour $|\theta| < \alpha/2$, la dernière inégalité implique $a \|x\|^2 < (B'x | x) < b \|x\|^2$. Ceci vaut dans E_i muni de la base (v) . On a une inégalité analogue dans chacun des sous-espaces E_i stables par A , et dont A est la somme directe. Une écriture plus précise de l'inégalité est :

$$\forall x \in E_i, \quad a \|x\|_{E_i}^2 < (B'_i x | x)_{E_i} < b \|x\|_{E_i}^2 \quad (*)$$

La réunion des bases (v) des E_i est une base de E qu'on déclare orthonormée, ce qui définit une structure euclidienne dans E . Pour cette structure euclidienne, l'endomorphisme A a pour matrice $A = \sum_i B'_i$. Un élément x quelconque de E se décompose sur les E_i en vecteurs satisfaisant (*). Compte tenu de l'orthogonalité des E_i et de leur stabilité par A , la sommation de (*) sur i fournit :

$$a \|x\|_E^2 < (Ax | x)_E < b \|x\|_E^2, \text{ plus simplement } a \|x\|^2 < (Ax | x) < b \|x\|^2 \quad \text{C.Q.F.D.}$$

4^e cas : B est un bloc de Jordan de dimension $2p$ avec $p > 1$, associé à un couple $\mu \pm i\omega$ de valeurs propres complexes. La matrice B' est un bloc de Jordan dont les éléments diagonaux sont des matrices 2×2 : $\Lambda = \begin{pmatrix} \mu & -\omega \\ \omega & \mu \end{pmatrix}$ et les éléments surdiagonaux des matrices unités I de dimension 2×2 .

Si on note $\text{diag } \Lambda$ la matrice bloc-diagonale formée des Λ et N la matrice nilpotente « bloc-surdiagonale », alors : $(B'x | x) = ((\text{diag } \Lambda)x | x) + (Nx | x)$.

Le raisonnement fait dans le cas précédent reste valable formellement.

Condition nécessaire $\Leftarrow$

La condition nécessaire s'exprime ainsi : s'il existe une valeur propre λ de A dont la partie réelle n'appartient pas au segment réel $]a, b[$, alors pour toute norme euclidienne $\| \cdot \|$ sur E , il existe $x \in E$ tel que $(Ax | x) \notin]a \|x\|^2, b \|x\|^2[$.

Examinons les deux cas : λ réel ou non.

cas a) : $\lambda \in \mathbb{R}$, avec $\lambda \notin]a, b[$. Soit x un vecteur propre pour λ .

$(Ax | x) = (\lambda x | x) = \lambda \|x\|^2$. Comme $\lambda \notin \mathbb{R}$, on a bien $(Ax | x) \notin]a \|x\|^2, b \|x\|^2[$

cas b) : $\lambda \notin \mathbb{R}$: dans ce cas, $\lambda = \mu + i\omega$, avec $\mu \notin]a, b[$. Soit $C = \begin{pmatrix} \mu & -\omega \\ \omega & \mu \end{pmatrix}$.

Il existe un sous-espace E_i de E dans lequel, pour la forme réduite de Jordan (la base correspondante de A est alors choisie orthonormée), la restriction B de A s'ex-

prime : $B = \begin{pmatrix} C & I \\ & C & \ddots \\ & & \ddots & I \\ & & & C \end{pmatrix}$, où I est la matrice unité 2×2 . Noter que le bloc C peut ne figurer qu'une fois sur la diagonale (cas où B est semi-simple). Alors, si dans E_i on prend

$x = (1, 0, \dots, 0)$, on a $Bx = (\mu, -\omega, 1, 0, \dots, 0)$, d'où $(Ax|x)_E = (Bx|x)_{E_i} = \mu$, et on a bien alors $(Ax|x) = \mu \notin]a\|x\|^2, b\|x\|^2[$, car cet intervalle n'est autre que $]a, b[$.

Ceci établit l'implication $\Leftarrow$, et le lemme est démontré.

ANNEXE 6 : FRACTALES

Les lignes, surfaces, volumes, ... sont des êtres géométriques de dimensions respectives 1, 2, 3...

Or, on peut observer (ou définir) des ensembles géométriques plus complexes pour lesquels il est possible de définir une dimension qui n'est pas nécessairement entière : un tel ensemble est dit **ensemble fractal**. On peut aussi le désigner par le substantif masculin **fractal** ou féminin **fractale**, terme inventé en 1975 par Benoît Mandelbrot.

Le terme « fractal » vient du latin *fractus*, qui signifie « brisé ». Il peut se justifier autant par l'aspect de ligne « infiniment brisée » de certains objets qu'il désigne, que par l'attribution à ces mêmes objets d'une dimension non entière, donc par exemple fractionnaire. Avant l'utilisation de ce néologisme, on désignait les fractales sous le nom de « courbes monstrueuses ».

On trouve des fractales :

- dans la **nature** : nuages, côtes maritimes, arbres, fougères, choux, etc. ;
- dans l'étude de **systèmes dynamiques** : l'exemple (1963) du système de Lorenz a donné une impulsion à l'étude des systèmes dits chaotiques. Rappelons l'équation d'évolution de ce système, évoqué au chapitre 11 :

$$[\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}] = [\sigma(y - x), \quad r x - y - xz, \quad xy - bz]$$

Pour certaines valeurs des paramètres, le portrait de phases de ce système présente dans $\mathbb{R}^3$ un **attracteur** de dimension comprise strictement entre 2 et 3. Pour presque toute condition initiale, la trajectoire se rapproche de l'attracteur en une suite infinie d'enroulements d'apparence erratique.

La dimension fractale

Le segment réel $[0, L]$ peut être recouvert par $N(\varepsilon) = L/\varepsilon$ segments de longueur ε (L étant un multiple entier de ε). De même, le carré $[0, L]^2$ est recouvert par $N(\varepsilon) = (L/\varepsilon)^2$ carrés de côté ε et le cube $[0, L]^3$ par $N(\varepsilon) = \varepsilon^3$ cubes d'arête L/ε .

Plus généralement, soit X un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^n$, qu'on suppose inclus dans $[0, L]^n$, moyennant une éventuelle translation. Maillons le pavé $[0, L]^n$ en m^n petits pavés d'arête $\varepsilon = L/m$. L'ensemble X rencontre $N(\varepsilon)$ (qu'on pourra aussi noter $N(m)$) petits pavés. En d'autres termes : il faut $N(m)$ petits pavés d'arête L/m pour recouvrir X .

On appelle **dimension de Kolmogorov** ou **de capacité** de X le nombre suivant, s'il existe :

$$\delta(X) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(\varepsilon)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln N(m)}{\ln(m)}$$

On remarque que les dimensions de capacité du segment, du carré et du cube (considérés comme pavés fermés) sont respectivement 1, 2 et 3.

Un calcul élémentaire de limite montre que pour X quelconque, la dimension de capacité ne dépend pas de L . On l'appelle **dimension fractale de X** . C'est un réel du segment $[0, n]$.

Exemples

a) Fractales déterministes

1. **Ensemble triadique de Cantor** (1883) : l'ensemble triadique de Cantor (ou « poussière de Cantor »), est l'ensemble K des réels de $[0, 1]$ dont l'écriture ternaire (c'est-à-dire en base 3) $0, a_1 a_2 a_3 \dots$ utilise exclusivement les 2 valeurs $a_i = 0$ ou 2 , ceci $\forall i \in \mathbb{N}^*$. Un ensemble de ce type intervient par exemple comme attracteur du système d'ordre 2 à temps discret de Hénon, ce dernier étant lié à la **section de Poincaré** (trace d'une orbite sur une variété transverse) du système de Lorenz.

L'ensemble triadique de Cantor fait l'objet de la section suivante.

On trouvera une définition précise des trois fractales suivantes dans l'énoncé du problème 13.1, ainsi qu'une représentation graphique de chacune d'entre elles.

2. **Triangle de Sierpinski** (1915) : compact obtenu à partir d'un triangle par soustractions successives de triangles de tailles décroissantes.
3. **Tapis de Sierpinski** : compact obtenu à partir d'un carré par soustractions successives de carrés de tailles décroissantes.
4. **Flocon de von Koch** (1904) : compact obtenu à partir d'un triangle (3 segments) par remplacement successif de chaque segment par une ligne brisée formée de 4 segments.

b) Fractales aléatoires

Une fractale aléatoire : le mouvement brownien à 2 dimensions se modélise par 2 variables aléatoires $X(t)$ et $Y(t)$ gaussiennes indépendantes, de même loi $N(0, \text{var} = t)$ et à accroissements indépendants telles que :

$$\forall c \in \mathbb{R}_+^*, [U(t), V(t)] = 1/c [X(c^2 t), Y(c^2 t)]$$

est un mouvement brownien de même loi que $[X(t), Y(t)]$.

Cette propriété d'invariance statistique par changement d'échelles (spatiale et temporelle) peut être utilisée pour conjecturer une valeur de la dimension fractale des trajectoires dans $\mathbb{R}^2$.

Ensemble triadique de Cantor

Soit K_0 le segment réel $[0, 1]$. Si l'on retire son tiers (ouvert) milieu $]1/3, 2/3[$, on obtient le fermé $K_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$, réunion de deux segments.

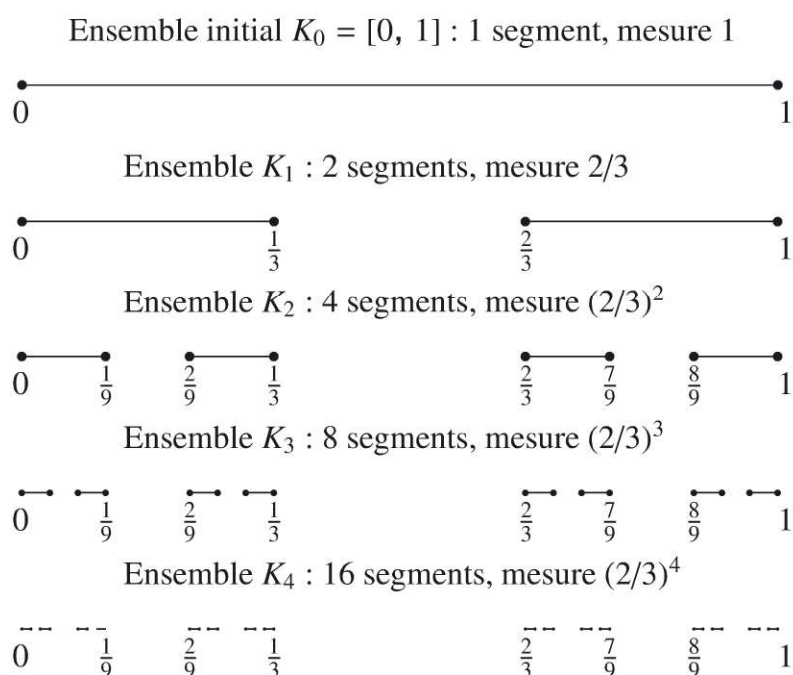
Sa mesure est $2/3$.

Si on ôte le tiers (ouvert) milieu de chacun des deux segments constituant K_1 , on obtient un nouvel ensemble fermé $K_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 3/9] \cup [6/9, 7/9] \cup [8/9, 1]$, réunion de 4 segments. Sa mesure est $(2/3)^2$.

Réitérons le procédé : K_{i+1} s'obtient par retrait du tiers milieu de chaque segment constituant K_i . La mesure de K_i est $(2/3)^i$. On obtient ainsi une suite infinie K_i de fermés, décroissante pour l'inclusion.

Par définition, leur intersection $K = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i$ est l'**ensemble triadique de Cantor**.

Construction des fermés K_i dont K est l'intersection



K et l'écriture ternaire

On rappelle que tout réel de $[0, 1]$ possède une ou deux écritures ternaires de la forme $0, a_1 a_2 a_3 \dots$ avec $a_i = 0, 1$ ou 2 .

Un nombre **ternaire** (c'est-à-dire quotient d'un entier par une puissance de 3) possède **deux** développements ternaires. Donnons deux exemples :

- l'entier 1 s'écrit indifféremment $1,000\dots$ ou $0,222\dots$;
- le rationnel $7/9$ s'écrit indifféremment $0,21000\dots$ ou $0,20222\dots$

Un nombre **non-ternaire**, rationnel ou non, a un développement ternaire **unique**.

Par exemple, le rationnel $1/2$ s'écrit $0,1111\dots$

- K_1 s'obtient en ôtant à K_0 les nombres pour lesquels a_1 est unique et vaut 1. On ne retire donc ni $1/3 = 0,1000\dots = 0,0222\dots$, ni $2/3 = 0,1222\dots = 0,2000\dots$, dont le a_1 n'est pas unique.

- K_2 s'obtient ôtant à K_1 les nombres pour lesquels a_2 est unique et vaut 1.
On ne retire donc ni $1/9 = 0,01000 \dots = 0,00222 \dots$,
ni $2/9 = 0,01222 \dots = 0,02000 \dots$, ni $7/9$, ni $8/9$, dont le a_2 n'est pas unique.
- Plus généralement, K_i s'obtient ôtant à K_{i-1} les nombres pour lesquels a_i est unique et vaut 1.

En conclusion, K_i ne comprend que des nombres x pour lesquels aucun des i chiffres $a_1, a_2, \dots, a_i$ n'est égal à 1 dans le (ou l'un des deux) développement(s) de x .

K , qui est l'intersection des K_i , ne contient donc que des nombres dont une écriture ternaire ne présente aucun « 1 ».

Réciproquement, un nombre dont une écriture ne présente aucun « 1 » ne fait l'objet d'aucun des retraits décrits ci-dessus : il appartient donc à K_i pour tout i , donc à leur intersection K .

En résumé : **K est l'ensemble des réels de $[0, 1]$ dont une écriture ternaire ne contient aucun « 1 ».**

Propriétés de K

K est compact : en effet, c'est une partie fermée (car K est par définition une intersection de fermés, donc un fermé) et bornée de $\mathbb{R}$.

K est de mesure nulle : car K est inclus dans K_i quel que soit i .

Or, la mesure de Lebesgue de K_i est $(2/3)^i$. Donc, $m(K) \leq \inf_{i \in \mathbb{N}} (2/3)^i$, soit $m(K) \leq 0$.
D'où $m(K) = 0$.

K est d'intérieur vide : c'est vrai de tout ensemble de mesure nulle. Car si l'intérieur $\overset{\circ}{A}$ de A est non-vide, il contient un élément a dont il est un voisinage. Il contient donc un intervalle ouvert contenant a . La mesure de $\overset{\circ}{A}$ vaut au moins celle, non-nulle de l'intervalle, et il en est de même pour A . Donc, $m(A) = 0 \Rightarrow \overset{\circ}{A} = \emptyset$.

K n'est pas dénombrable : d'après ce qui précède, tout élément x de K a une écriture ternaire $x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$ avec $\forall i, a_i = 0$ ou 2 . Associons à x le réel de $[0, 1]$ d'écriture **binnaire** $0, b_1 b_2 b_3 \dots$ avec $b_i = a_i/2$: cette application de K dans $[0, 1]$ étant surjective, $\text{Card}(K) \geq \text{Card}([0, 1])$.

Mais $K \subset [0, 1] \Rightarrow \text{Card}(K) \leq \text{Card}([0, 1])$. D'où $\text{Card}(K) = \text{Card}([0, 1]) = \text{Card}(\mathbb{R})$.

K n'est donc pas dénombrable.

On obtient ainsi un exemple d'ensemble non-dénombrable de mesure nulle.

K possède la propriété d'auto-similarité : K est l'homologue de sa partie $K \cap [0, 1/3]$ dans l'homothétie de centre 0 et de rapport 3. Plus généralement, c'est l'homologue de $K \cap [0, 1/3^n]$ dans l'homothétie de centre 0 et de rapport 3^n .

K ne possède pas de point isolé : en d'autres termes, tout point de K est un point d'accumulation.

En effet, si $x = 0$, $a_1 a_2 a_3 \cdots \in K$, la suite $x_n = 0, a_1 a_2 a_3 \cdots, a_{n-1}, a_n, 0, 0, 0, \dots$ est une suite de points de K convergeant vers x .

K est de dimension non entière : si on divise $[0, 1]$ en $m = 3^k$ segments, le recouvrement de K exige, tout comme K_k , $N(m) = 2^k$ d'entre eux.

$$\frac{\ln N(m)}{\ln m} = \frac{k \ln 2}{k \ln 3} = \frac{\ln 2}{\ln 3} =, \text{ ceci pour tout } k.$$

Donc, la dimension fractale de K est $\delta(K) = \ln 2 / \ln 3$.

On pourra relire l'intermède « le cantor au secours de Cantor » au § 11.3.3

Exercice 13.3 Dimension fractale du segment rationnel

Soit $\mathbb{Q}_0 = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ le segment unité rationnel.

1. Calculer la mesure de Lebesgue $m(\mathbb{Q}_0)$ et la dimension fractale $\delta(\mathbb{Q}_0)$.
2. Quelles observations inspire la comparaison de la question précédente avec le cas de l'ensemble triadique de Cantor ?

Problème 13.1 Dimensions de trois fractales classiques

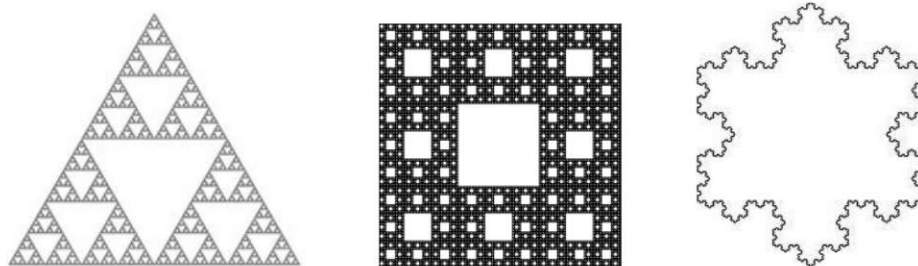


Figure 13.3 - Trois fractales.

1. **Triangle de Sierpinski** (1915) : un triangle équilatéral est composé de 4 triangles égaux (figure de gauche). On ôte le triangle central ouvert : il reste donc trois triangles équilatéraux sur lesquels on répète l'enlèvement du triangle central. On réitère l'opération indéfiniment.
On obtient ainsi un compact T qu'on appelle triangle de Sierpinski.
Calculer la dimension fractale $\delta(T)$ de T .

Indications :

1) *s'inspirer de la démarche effectuée pour l'ensemble de Cantor ;*

2) *Au lieu d'effectuer un maillage carré, on effectuera un maillage triangulaire de T , pour lequel on admettra la validité de la formule fournissant $\delta(K)$.*

- 2. Tapis de Sierpinski :** un carré est composé de 9 carrés égaux (figure centrale). On ôte le carré central ouvert : il reste donc huit carrés sur lesquels on répète l'enlèvement du carré central. On réitère l'opération indéfiniment.

On obtient ainsi un compact U qu'on appelle tapis de Sierpinski.

Calculer la dimension fractale $\delta(T)$ de T .

- 3. Flocon de von Koch (1904) :** soit F_0 un triangle équilatéral.

F_1 s'obtient en remplaçant le tiers milieu de chaque côté par le « Λ » qui forme avec lui un triangle équilatéral extérieur à F_0 .

Pour F_2 , on opère de même à partir des 12 segments qui constituent F_1 . On appelle flocon de von Koch (figure de droite) l'ensemble limite $F = F_\infty$ obtenu.

Calculer la dimension fractale $\delta(F)$ de F .

ANNEXE 7 : SCHÉMAS NUMÉRIQUES

Pour obtenir à l'aide d'un logiciel des solutions numériques de l'équation $\dot{x} = f(x)$, il est nécessaire de transformer cette équation différentielle en une équation aux différences finies. Ceci suppose que l'on approche les dérivées par des quotients convenables, et que l'on choisisse un pas de discrétisation temporelle. Ce dernier peut ou non être régulier. Une telle démarche s'appelle une méthode des **différences finies**, et le type correspondant de formulation un **schéma numérique**.

Exemple

Considérons l'équation différentielle ordinaire $\dot{x}(t) = \lambda x(t)$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, à résoudre pour $t \in [0, 1]$ avec la condition initiale $x(0) = x_0$. Nous choisissons un pas de discrétisation h du temps ; nous nous plaçons donc aux instants kh avec $k \in \mathbb{N}$. L'état peut alors être noté $x_k = x(kh)$, ce qui transforme le problème initial à temps continu en un problème à temps discret. Parmi les schémas numériques envisageables, donnons les plus simples :

- Le **schéma d'Euler explicite** consiste à approcher la dérivée $\dot{x}(kh)$ par :

$$\frac{x[(k+1)h] - x[kh]}{h}, \text{ d'où } \frac{x_{k+1} - x_k}{h} = \lambda x_k,$$

ce qui fournit l'équation

$$x_{k+1} = (1 + \lambda h) x_k.$$

On a un système à temps discret d'ordre 1 et dimension 1.

- Dans le **schéma de Crank Nicholson** symétrique suivant, on approche la dérivée $\dot{x}(kh)$ par :

$$\frac{x[(k+1)h] - x[(k-1)h]}{2h}, \text{ d'où } \frac{x_{k+1} - x_{k-1}}{2h} = \lambda x_k,$$

ce qui fournit l'équation $x_{k+1} - 2\lambda h x_k - x_{k-1} = 0$: on a un système à temps discret d'ordre 2 et dimension 1. On le transforme en un système d'ordre 1 et dimension 2 en prenant $z_k = \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k-1} \end{pmatrix}$, d'où $z_{k+1} = \begin{pmatrix} 2\lambda h & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} z_k$. La résolution suppose une initialisation par deux valeurs consécutives de x .

Mise en œuvre

La mise en œuvre d'un schéma numérique sera effectuée dans la grande majorité des cas par un logiciel déjà existant. Qu'il s'agisse de logiciels libres ou accessibles par les réseaux commerciaux habituels, il en existe une large gamme dévolue à la résolution des problèmes classiques :

- équations différentielles ordinaires, à variable scalaire ou vectorielle ;
- équations aux dérivées partielles.

Il reste toutefois intéressant de signaler les **méthodes de Runge-Kutta** qui offrent le double avantage d'être performantes et faciles à implanter. Ces méthodes s'appliquent à un état vectoriel $x \in \mathbb{R}^n$.

- La méthode **Runge-Kutta d'ordre 1** utilise le schéma d'Euler précédemment décrit. L'erreur est de l'ordre de h^2 .
- La méthode **Runge-Kutta d'ordre 2** utilise une estimation de la dérivée au milieu du pas d'intégration : comme l'état à mi-chemin entre le pas n et le pas $(n + 1)$ est estimé (Euler) par $x_n + \frac{h}{2} f(x_n)$, on a le schéma $x_{n+1} = x_n + h f\left[x_n + \frac{h}{2} f(x_n)\right]$, qui s'écrit encore, dans l'ordre des calculs :

$$k_1 = f(x_n)$$

$$k_2 = f(x_n + h k_1/2)$$

$$\text{puis : } x_{n+1} = x_n + h k_2$$

Le calcul confirme le bien fondé de l'intuition initiale en montrant que l'erreur est ramenée à l'ordre de h^3 .

- La méthode **Runge-Kutta d'ordre 4** exploite la même idée que la précédente, mais en poussant plus loin la logique itérative des approximations. Elle conduit au schéma (toujours dans l'ordre des calculs) :

$$k_1 = f(x_n)$$

$$k_2 = f(x_n + h k_1/2)$$

$$k_3 = f(x_n + h k_2/2)$$

$$k_4 = f(x_n + h k_3)$$

$$\text{puis : } x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

L'erreur est de l'ordre de h^5 .

CORRIGÉS DES EXERCICES ET PROBLÈMES

14

L'ordre des corrigés est l'ordre d'apparition des exercices et problèmes dans le livre.

CHAPITRE 1

Exercice 1.1 Mise de systèmes différentiels sous la forme $\dot{x} = f(x)$

1. Posant $x = \begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \\ v \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, on a $\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \ddot{u} \\ \dot{v} \\ \ddot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & a & d & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ h & g & f & e \end{pmatrix} \cdot x$, de la forme $A \cdot x$

On obtient ainsi un système **linéaire** de **dimension 4**. Ce procédé se généralise à un système comportant un nombre quelconque d'équations différentielles de degrés quelconques, de structure analogue à celles proposées.

2. Posant $x = \begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \\ v \\ \dot{v} \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$, on a $\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \ddot{u} \\ \dot{v} \\ \ddot{v} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & d & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ h & g & f & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha(x_5) \\ 0 \\ \beta(x_5) \\ 1 \end{pmatrix}$,

de la forme $f(x)$.

On obtient ainsi un système autonome de **dimension 5**. Quels que soient α et β , le système n'est pas linéaire en raison de l'équation $\dot{x}_5 = 1$. Comme pour la question précédente, le procédé se généralise à des équations différentielles de degrés quelconques.

3. Posant $x = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, on a : $\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \ddot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(x_1, x_2) \\ x_3 \\ k(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}$

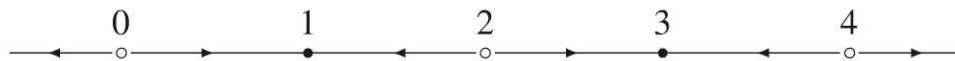
On obtient ainsi un système de **dimension 3** de la forme $g(x)$ cherchée.

Exercice 1.2 Des portraits de phases

1. Équation logistique : les points 0 et 1 divisent $\mathbb{R}$ en 3 intervalles. La dérivée $\dot{x}$ est négative pour $x < 0$, positive sur $]0, 1[$, négative pour $x > 1$. Il y a deux équilibres : 0 est instable, 1 est asymptotiquement stable, notions définies au chapitre 3.



2. Les 5 équilibres délimitent 6 intervalles : sur R^* , $\dot{x}$ est négatif puis change de signe au franchissement de chaque équilibre. Les équilibres 0, 2 et 4 sont instables, 1 et 3 sont asymptotiquement stables.



3. (a) 0 est l'équilibre (asympt. stable) unique : les orbites sont paraboliques (demi-paraboles d'axe Oy , figure 14.1.a, comme l'atteste la résolution analytique ;
(b) 0 est l'équilibre (instable) unique : les orbites sont hyperboliques (demi-hyperboles d'asymptotes Ox et Oy , figure 14.1.b.

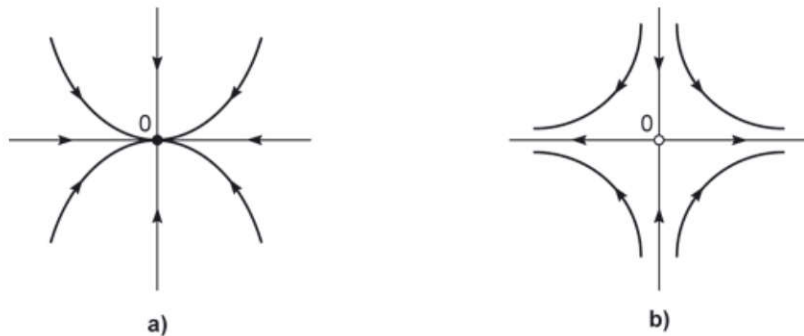


Figure 14.1

4. • $\rho = 1$ est une orbite et un cycle-limite, notion définie au § 7.2.2.
• Dans le disque $\rho < 1$: les trajectoires sont des spirales s'éloignant de 0 (équilibre instable) pour se rapprocher du cycle-limite.
• Hors du disque, ce sont des spirales se rapprochant du cycle limite.
Le portrait de phases est celui de la figure 7.1.b.

Exercice 1.3 Toute orbite est connexe

Soit $a \in \Omega$. La connexité de $Orb(a)$ se déduit immédiatement du fait que le flot $t \in J(a) \mapsto \phi(t, a)$ est continu et que l'image continue d'un ensemble connexe (ici : plage temporelle $J(a)$) est connexe.

Rappel de la démonstration : soit f continue de E topologique dans F topologique, et $X \subset E$ connexe. Si $f(X)$ n'est pas connexe, il est réunion disjointe de A et B ouverts. Dès lors, X est réunion disjointe de $f^{-1}(A)$ et $f^{-1}(B)$ ouverts, et n'est donc pas connexe, ce qui contredit l'hypothèse. Donc, $f(X)$ est connexe.

Exercice 1.4 Un système unidimensionnel a-t-il des orbites périodiques ?

1. Pour $\Omega = \mathbb{R}$, Soit $t \mapsto x(t)$ une solution périodique non triviale de $\dot{x} = f(x)$, de période $T > 0$. Le segment d'orbite correspondant à $t \in [0, T]$ est un compact de $\mathbb{R}$, connexe d'après l'exercice 1.3, donc un segment $[m, M]$ tel que $M > m$.

1^{re} approche : $[m, M]$ étant « balayé » périodiquement, $a \in]m, M[$ est atteint à au moins un instant à vitesse $\dot{x}$ positive (pour passer de m à M) et à au moins un instant à vitesse négative (pour passer de M à m) ce qui est contradictoire car les deux vitesses sont égales et valent $f(a)$. Il **n'existe donc pas** d'orbite périodique.

2^e approche : Soit $t_m \in [0, T]$ tel que $x(t_m) = m$. Si $f(t_m) \neq 0$, un développement de Taylor d'ordre 1 de $x(t)$ montre qu'au voisinage de t_m , $x(t)$ prend des valeurs inférieures à m . Ceci étant exclu, on a $f(t_m) = 0$, qui implique que m est un équilibre : mais alors, $\text{Orb}(m) = \{m\}$ ce qui contredit l'inégalité $M > m$. Il **n'existe donc pas** d'orbite périodique.

2. Pour $\Omega = T^1$, on peut identifier Ω à un cercle. Dès lors, le mouvement circulaire uniforme à vitesse angulaire constante **est un exemple** de solution non-triviale périodique.

Problème 1.1 Un critère de mort explosive

1. (a) La solution $x(t)$ satisfait $x^{-\alpha} dx = dt$, c'est-à-dire $\frac{d(x^{1-\alpha})}{1-\alpha} = dt$, qui s'intègre (puisque $\alpha \neq 1$) en $x^{1-\alpha} = x_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)t$, d'où :

$$x(t) = \left[x_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)t \right]^{1/(1-\alpha)}$$

- (b) L'expression précédente a un sens pour tout t si $\alpha < 1$. Alors, pour tout $x_0 > 0$, la plage temporelle $J(x_0)$ n'est pas bornée à droite. Si en revanche $\alpha > 1$, alors $x(t)$ tend vers l'infini lorsque l'expression entre crochets tend vers 0, ce qui détermine le temps d'explosion : $t_f(x_0) = \frac{x_0^{1-\alpha}}{\alpha-1}$, borne supérieure de $J(x_0)$.

Remarque : comme pour $\alpha = 1$ (système linéaire) on a $J(x_0) = \mathbb{R}$, il résulte de ce qui précède que : $\forall x_0 \in \Omega, \quad t_f(x_0) < +\infty$ (mort explosive) $\iff \alpha > 1$. Ainsi, en un certain sens, les systèmes linéaires ($\alpha = 1$) sont « à la limite de l'explosion ».

2. La solution $x(t)$ satisfait $\frac{dx}{x(\ln x)^\beta} = dt$, c'est-à-dire, pour $\beta \neq 1$:

$$d\left(\frac{(\ln x)^{1-\beta}}{1-\beta}\right) = dt, \text{ qui s'intègre en } (\ln x)^{1-\beta} = (\ln x_0)^{1-\beta} + (1-\beta)t, \text{ d'où :}$$

$$\ln(x(t)) = \left[(\ln x_0)^{1-\beta} + (1-\beta)t\right]^{1/(1-\beta)}$$

Cette expression montre que $t_f = +\infty$ (mort non explosive) si $\beta < 1$, mais que $t_f < +\infty$ (explosion) si $\beta > 1$.

Pour $\beta = 1$, l'équation d'évolution du système s'écrit $\frac{dx}{x \ln x} = dt$, c'est-à-dire $d[\ln(\ln x)] = dt$, qui s'intègre en : $\ln(\ln x) = \ln(\ln x_0) + t$. En prenant deux fois l'exponentielle des deux membres, on obtient $x(t) = e^{\ln x_0 e^t}$ (attention, le fragment e^t est bien dans l'exposant). Cette solution est définie pour tout $t \geq 0$, ce qui montre que le système n'est pas explosif.

En conclusion, pour tout état initial $x_0 > 1$:

Le système $\dot{x} = x(\ln x)^\beta$ explose si et seulement si $\beta > 1$.

3. (a) Pour $x > 1$, $\ln x > 0 \implies \dot{x} > 0$. Donc, pour $x_0 \in \Omega$, $\text{Orb}^+(x_0)$ est un intervalle du type $[x_0, b[$; b est soit un équilibre soit $+\infty$. Comme le système ne présente aucun équilibre dans Ω , on a $b = +\infty$. D'où $\text{Orb}^+(x_0) = [x_0, +\infty[$.

- (b) Pour $\alpha > 1$, quel que soit β , on aura $\dot{x} > x^{\frac{1}{2}(1+\alpha)}$ au-delà d'une certaine valeur de x , nécessairement atteinte d'après le a). Comme $\frac{1}{2}(1+\alpha) > 1$, le système $\dot{x} = x^{\frac{1}{2}(1+\alpha)}$ explose (question 1). Il en est donc de même du système $\dot{x} = x^\alpha (\ln x)^\beta$ car pour ce système $\dot{x} > x^{\frac{1}{2}(1+\alpha)}$ au-delà d'une certaine valeur de x .

Pour $\alpha = 1$, le système explose si et seulement si $\beta > 1$ (question 2).

Enfin, pour $\alpha < 1$, un raisonnement analogue à celui fait pour $\alpha > 1$ montre que $\dot{x}$ est majoré au-delà d'un certain x par $x^{\frac{1}{2}(1+\alpha)}$, associé à un système non explosif. Il en résulte que $\dot{x} = x^\alpha (\ln x)^\beta$ n'est lui-même pas explosif.

Résumons ces résultats :

Sur $\Omega =]1, +\infty[$, le système $\dot{x} = x^\alpha (\ln x)^\beta$, où α et β sont des réels quelconques, explose si et seulement si :

- soit $\alpha > 1$;
- soit $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

(c) On peut imaginer (liste non exhaustive) quelques applications de ce qui précède :

- Sur $\Omega =]1, +\infty[$, si la fonction $f(x)$ majore au delà de $x = a$ une fonction du type $x^\alpha (\ln x)^\beta$ correspondant à un cas explosif, le système explose pour tout $x_0 \geq a$ d'après la question 1.
- Sur $\Omega =]1, +\infty[$, si la fonction $f(x)$ est équivalente lorsque $x \rightarrow \infty$ à une fonction du type $x^\alpha (\ln x)^\beta$, les deux systèmes sont (pour x_0 assez grand) de même nature, explosive ou non.
- Sur $\Omega = \mathbb{R}^n$, on peut étudier le comportement de la norme $\|x\| = \rho$. Il est parfois possible d'obtenir une inégalité du type $\dot{\rho} \leq f(\rho)$ ou $\dot{\rho} \geq f(\rho)$, où f est la forme étudiée dans cet exercice. On peut dès lors exploiter les résultats correspondants.

Exercice 1.5 Classe C^1 et Lipschitz

Soit $]a, b[\in \Omega$ un voisinage de x_0 tel que $[a, b] \in \Omega$; f' étant continue sur $[a, b]$, elle y est majorée.

Il existe k tel que : $\forall x \in [a, b], |f'(x)| \leq k$.

Alors, $\forall x_1, x_2 \in]a, b[, \exists c \in]x_1, x_2[$ tel que $f(x_2) = f(x_1) + (x_2 - x_1)f'(c)$ (accroissements finis).

Donc, $|f(x_2) - f(x_1)| = |x_2 - x_1| \cdot |f'(c)| \leq k \cdot |x_2 - x_1|$, ce qui montre que f est lipschitzienne de rapport k sur $]a, b[$.

Par conséquent, f est localement lipschitzienne sur Ω .

Exercice 1.6 Des trajectoires sécantes

Pour $x > 0$: $\frac{dx}{dt} = 2\sqrt{x}$, d'où $d(\sqrt{x}) = dt$; donc, $\sqrt{x} = t - t_0$,
d'où $x(t) = (t - t_0)^2$ pour $t \geq t_0 \geq 0$ et $x(t) = 0$ sur $[0, t_0]$.

Pour $x < 0$: $\frac{dx}{dt} = 2\sqrt{-x}$, d'où $d(\sqrt{-x}) = -dt$; donc, $\sqrt{-x} = -t + t_1$,
d'où $x(t) = -(t - t_1)^2$ pour $t \leq t_1 \leq 0$ et $x(t) = 0$ sur $[t_1, 0]$.

Donc, $\forall t_0, t_1$ tels que $t_1 \leq 0 \leq t_0$:

$$x(t) = \begin{cases} -(t - t_1)^2 & \text{pour } t \leq t_1 \\ 0 & \text{pour } t_1 \leq t \leq t_0 \\ (t - t_0)^2 & \text{pour } t \geq t_0 \end{cases}$$

est solution du système.

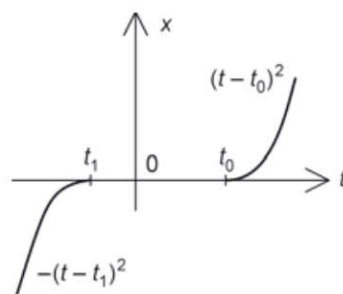


Figure 14.2

Toutes ces solutions (= trajectoires) se coupent en $(t, x) = (0, 0)$. Les conditions du théorème de Cauchy *ne sont pas satisfaites*, car $f(x)$ n'est pas localement lipschitzienne.

L'équilibre 0 est semi-stable à *temps de séjour quelconque*.

Exercice 1.7 L'unicité des trajectoires n'exige pas Lipschitz

1. f est discontinue en 0. Comme le caractère localement lipschitzien entraîne la continuité :
 f n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
2. Dans le plan (t, x) , les trajectoires sont des lignes brisées continues de pente $f(x) = +1$ pour $x \leq 0$, et de pente $f(x) = +2$ pour $x \geq 0$ (une trajectoire est donc constituée de deux demi-droites de même origine). Le simple examen des trajectoires dans le plan (t, x) montre que :
tout $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ appartient à une trajectoire unique définie pour tout temps réel.

Problème 1.2 Quand Lipschitz n'est pas là, les trajectoires dansent

$$1. \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{IM} = \begin{pmatrix} \theta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix}, \text{ soit } \boxed{\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} \theta - \sin \theta \\ 1 - \cos \theta \end{pmatrix}}$$

$$\text{Par dérivation : } \boxed{\overrightarrow{V} = \dot{\theta} \begin{pmatrix} 1 - \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}}$$

2. L'énergie cinétique est : $E_c = \frac{\dot{\theta}^2}{2} [(1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta] = \dot{\theta}^2 (1 - \cos \theta)$
L'énergie potentielle est : $E_p = -mgy = -y = -(1 - \cos \theta)$.
D'où $E_c + E_p = (\dot{\theta}^2 - 1)(1 - \cos \theta) = E_c(0) + E_p(0) = 0$. Par conséquent, $\dot{\theta} = \pm 1$ pour $\theta \neq 2k\pi$.
Compte tenu de l'exigence de déplacement vers la droite, on a donc : $\dot{\theta} = 1$ pour $\theta \neq 2k\pi$: Γ roule sur Ox à vitesse constante.
3. De θ , on déduit l'ordonnée de M donc sa vitesse (car $E_c + E_p = 0$) ; on dispose par conséquent d'une description complète du système mécanique à t . Or, $\theta \mapsto x = \theta - \sin \theta$ est une bijection de $\mathbb{R}$.
On peut par conséquent prendre indifféremment θ ou x comme état du système.
4. Si l'on appelle φ la bijection inverse de la bijection $\theta \mapsto x = \theta - \sin \theta$, on a $\theta = \varphi(x)$.
Or (1^{re} question), $\dot{x} = \dot{\theta} (1 - \cos \theta) = 1 - \cos \theta$.

Par conséquent $\forall x \in \mathbb{R}, \dot{x} = f(x) = 1 - \cos[\varphi(x)]$

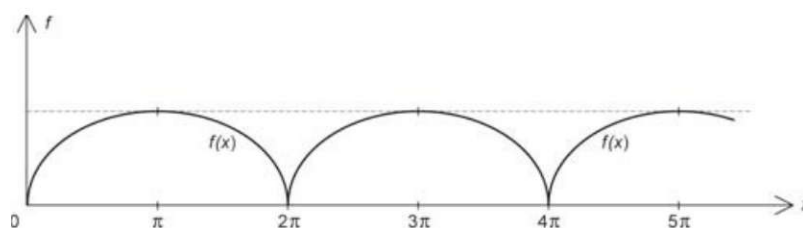


Figure 14.3

Au voisinage de $\theta = 2k\pi$, $x - 2k\pi$ se comporte (formule de Taylor-Young) comme $(\theta - 2k\pi)^3/6$.

Donc, au voisinage de $x = 2k\pi$, $\theta - 2k\pi$ se comporte comme $[6(x - 2k\pi)]^{1/3}$, et $\dot{x} = 1 - \cos \theta$ comme $(\theta - 2k\pi)^2/2$, donc comme $\lambda(x - 2k\pi)^{2/3}$, où λ est une constante. Il en résulte que la fonction $f(x)$ est partout *continue*, de classe C^1 hors de $2\pi\mathbb{Z}$, mais n'est *pas localement lipschitzienne* au voisinage des valeurs $2k\pi$.

5. Les équilibres sont donnés par $\dot{x} = 0$, soit $x = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Toute fonction du type suivant :

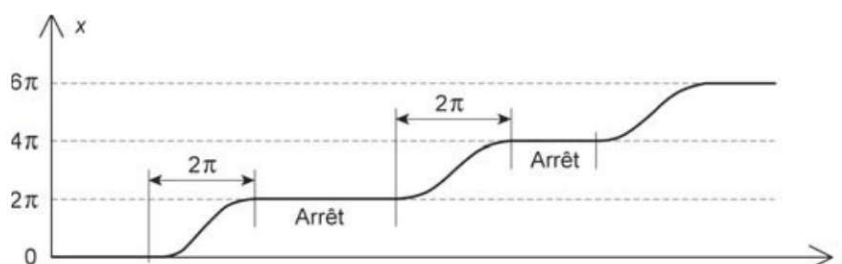


Figure 14.4

est une solution (=trajectoire) du système : x peut s'arrêter pour une durée arbitraire à un équilibre, puis « repartir ». Il y a donc une *infinité de trajectoires* telles que $x(0) = 0$, et tout équilibre est *instable*. La trajectoire sans arrêts aux équilibres est $x(t) = t - \sin t$ ($\forall t \in \mathbb{R}$).

Il résulte de ce qui précède que toute orbite de M dans le plan xOy correspond à un nombre entier (ou infini) de tours complets de Γ : elle est la réunion connexe d'arcs de *cycloïdes*. L'orbite minimale est le point O , l'orbite sans arrêts se développe à l'infini à gauche et à droite. Dans tous les cas, la plage temporelle est $J = \mathbb{R}$.

CHAPITRE 2

Exercice 2.1 Exponentielle de matrice

La matrice $J = A + B$ est telle que $J^2 = I$, matrice unité. Par conséquent :

$$\begin{aligned} \exp(A + B) &= I + J + \frac{J^2}{2!} + \frac{J^3}{3!} + \frac{J^4}{4!} + \cdots \\ &= \left[I + \frac{J^2}{2!} + \frac{J^4}{4!} + \cdots \right] + \left[J + \frac{J^3}{3!} + \frac{J^5}{5!} + \cdots \right] \\ &= \underbrace{\left[1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \cdots \right]}_{\cosh 1} I + \underbrace{\left[1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \cdots \right]}_{\sinh 1} J, \end{aligned}$$

$$\text{soit } \exp(A + B) = \begin{pmatrix} \cosh 1 & \sinh 1 \\ \sinh 1 & \cosh 1 \end{pmatrix}$$

Comme $A^2 = 0$, $\exp(A)$ se réduit aux deux premiers termes du développement, soit :

$$\exp(A) = I + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{De même, } B^2 = 0, \text{ d'où } \exp(B) = I + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On constate que e^{A+B} , $e^A \cdot e^B$ et $e^B \cdot e^A$ sont toutes trois distinctes.

Exercice 2.2 Conjugaison centrifuge - centripète

1. $\dot{x} = f(x) = x$: la fonction f est lipschitzienne de rapport 1, donc *a fortiori* localement lipschitzienne sur Ω_1 : donc, **le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique**.

$x(t)$ s'obtient classiquement par : $x(t) = x_0 e^t$, solution définie pour tout t réel.
Donc, $\forall x_0 \in \Omega_1$, $J(x_0) = \mathbb{R}$.

2. Toute trajectoire est d'équation $x(t) = x_0 e^t$. Donc, $\text{Orb}(x_0) = \{x_0 e^t ; t \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}_+^*$ si $x_0 > 0$, $\mathbb{R}_-^*$ si $x_0 < 0$. Par conséquent, S_1 admet **les demi-droites $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ comme seules orbites**.

Pour Σ , il convient d'ajouter une 3^e orbite constituée de **l'équilibre $\{0\}$** .

3. (a) De même que $x(t) = x_0 e^t$ est l'équation des trajectoires de S_1 , $x(t) = x_0 e^{-t}$ est l'équation des trajectoires de S_2 . On en déduit l'expression des flots :
 $\phi_1(t, x) = x e^t$ et $\phi_2(t, x) = x e^{-t}$.

(b) On a trivialement $\psi \circ \psi = \text{identité de } \Omega_1$. Donc, ψ est une bijection. Elle est clairement continue, donc aussi bicontinue puisque $\psi^{-1} = \psi$. Par conséquent, ψ est un homéomorphisme.

$$(c) \phi_2[t, \psi(x)] = \psi(x) e^{-t} = \frac{1}{x} e^{-t}.$$

$$\text{Parallèlement, } \psi[\phi_1(t, x)] = \psi[x e^t] = \frac{1}{x e^t} = \frac{1}{x} e^{-t}$$

On a bien $\phi_2 \circ \psi = \psi \circ \phi_1$, ce qui montre que S_1 et S_2 sont conjugués.

4. (a) Les résultats formels de la question 3.a) restent valables :

$$\phi_1(t, x) = x e^t \text{ et } \phi_2(t, x) = x e^{-t}.$$

$$(b) \forall x \in \Omega_1, (\psi \circ \psi)(x) = \psi[\psi(x)] = \psi\left[\frac{x}{\|x\|^2}\right] = \frac{\frac{x}{\|x\|^2}}{\left\|\frac{x}{\|x\|^2}\right\|^2} = \frac{x}{\|x\|^2} \cdot \frac{\|x\|^4}{\|x\|^2} = x.$$

Donc, ψ est involutive ($\psi \circ \psi = \text{identité}$). C'est une bijection continue, donc aussi bicontinue puisque $\psi^{-1} = \psi$. Par conséquent, ψ est un homéomorphisme.

$$(c) \phi_2[t, \psi(x)] = \psi(x) e^{-t} = \frac{x}{\|x\|^2} e^{-t}.$$

$$\text{Parallèlement, } \psi[\phi_1(t, x)] = \psi[x e^t] = \frac{x e^t}{\|x e^t\|^2} = \frac{x}{\|x\|^2} e^{-t}$$

On a bien $\phi_2 \circ \psi = \psi \circ \phi_1$, ce qui montre que S_1 et S_2 sont conjugués.

Remarque

Ω_1 et Ω_2 sont connexes pour $n \geq 2$ mais possèdent deux composantes connexes pour $n = 1$.

Exercice 2.3 Détermination d'un flot conjugué

$$1. \text{ Par définition : } \nabla\psi = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial r}{\partial z} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} & \frac{\partial \theta}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\frac{\sin \theta}{r} & \frac{\cos \theta}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. La condition de conjugaison s'écrit

$$f_2[\psi(x)] = \nabla\psi[f_1(x)] = \nabla\psi \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 1 \end{pmatrix} = \nabla\psi \begin{pmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ce vecteur vaut $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc, f_2 est constant : $f_2(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. L'expression de f_2 permet une intégration immédiate, qui fournit le flot :

$$\phi_2(t, r_0, \theta_0, z_0) = \begin{pmatrix} r_0 \\ \theta_0 + t \\ z_0 + t \end{pmatrix}$$

CHAPITRE 3

Exercice 3.1 Tout fermé peut être un ensemble des équilibres

1. $d(y, X) = \inf_{z \in X} d(y, z) \leq \inf_{z \in X} [d(y, x) + d(x, z)] \leq d(y, x) + \inf_{z \in X} d(x, z) \leq d(y, x) + d(x, X)$

Donc, $d(y, X) - d(x, X) \leq d(x, y)$. Par symétrie : $d(x, X) - d(y, X) \leq d(x, y)$
Par conséquent, $|d(x, X) - d(y, X)| \leq d(x, y)$, ce qui montre que :

$x \mapsto d(x, X)$ est lipchitzienne de rapport 1.

2. Soit $E = \mathbb{R}^n$ et X un fermé quelconque de E . Soit $u \in \mathbb{R}^{n*}$, et S le système $\dot{x} = f(x)$ avec $f(x) = u \cdot d(x, X)$. Ce système est lipschitzien d'après la question précédente.

$$\begin{aligned} x \text{ équilibre de } S &\iff f(x) = 0 \iff d(x, X) = 0 \text{ car } u \neq 0 \\ &\iff x \in \overline{X} \text{ (propriété classique dans un espace métrique)} \\ &\iff x \in X \text{ car } X = \overline{X} \text{ (} X \text{ fermé)} \end{aligned}$$

Donc, X est l'ensemble $\mathcal{E}$ des équilibres de S lipschitzien.

3. Soit a un point d'accumulation de $\mathcal{E}$. Alors, il existe une suite $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ de points de $\mathcal{E}$ distincts de a convergeant vers a .

Formellement : $\forall \eta, \exists n_\eta$ tel que $n \geq n_\eta \Rightarrow a_n \in \mathcal{B}(a, \eta)$.

Alors, pour tout t , $\phi(t, a_n) = a_n$ car a_n est un équilibre. Ceci contredit l'attractivité de a , qui s'exprimerait $\exists \eta$ tel que $x \in \mathcal{B}(a, \eta) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, x) = a$.

Ceci montre que a est simplement stable.

4. Pour $E = \mathbb{R}^2$, le point 0 est un équilibre :

- isolé et simplement stable pour le système $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x$
- isolé et asymptotiquement stable pour le système $\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x$.

Exercice 3.2 Un équilibre centrifuge mais stable

1. L'équilibre 0 est « protégé » par une infinité d'équilibres situés arbitrairement près à sa droite et à sa gauche. Donc, **0 est stable**.

$f(x)$ est, hors des équilibres, strictement négative pour $x < 0$, strictement positive pour $x > 0$. Donc presque tout point s'éloigne de 0, ce qui montre que cet équilibre est **centrifuge**.

Remarques

- (a) On vérifie sans peine que f' est continue sur $\mathbb{R}$: le système est donc de classe C^1 .
- (b) 0 est stable mais pas asymptotiquement stable.

2. On peut généraliser à $\mathbb{R}^n$ en considérant la fonction $f(x) = x \cdot \|x\|^2 \sin^2 \frac{1}{\|x\|}$.

On pourrait aussi généraliser dans une autre voie en recherchant un système de classe C^∞ ;

la nouvelle fonction : $f(x) = x \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \sin^2 \frac{1}{x}$ répond à la question.

Exercice 3.3 Conservation de la nature d'un point par conjugaison

Il est déjà démontré (§ 3.2.5) que la conjugaison conserve la nature « point régulier » ou « équilibre ». Dans le cas d'un équilibre, il reste à en préciser la nature selon les cinq cas cités.

• **a équilibre stable** : soit V_2 un voisinage de $\psi(a)$ dans Ω_2 . Comme ψ est continue, $\psi^{-1}(V_2)$ est un voisinage V_1 de a dans Ω_1 . Par définition de la stabilité de a : il existe un voisinage W_1 de a tel que :

$$x \in W_1 \implies \forall t \geq 0, \phi(t, x) \in V_1.$$

Or, ψ^{-1} est continue (définition d'un homéomorphisme) ; donc, $\psi(W_1)$ est un voisinage W_2 de $\psi(a)$.

Soit $y \in W_2$. Appliquons la relation de conjugaison $\phi_2 \circ \psi = \psi \circ \phi_1$ au couple $(t, \psi^{-1}(y))$; il vient :

$$\phi_2[t, \psi(\psi^{-1}(y))] = \psi \left[\underbrace{\phi_1(t, \psi^{-1}(y))}_{\in V_1 \text{ car } \psi^{-1}(y) \in W_1} \right]$$

Le 1^{er} membre vaut $\phi_2(t, y)$. Comme $V_1 = \psi^{-1}(V_2)$, le 2^e membre appartient à V_2 .
En résumé : $y \in W_2 \implies \forall t \geq 0, \phi_2(t, y) \in V_2$, ce qui montre que ***l'équilibre $\psi(a)$ est stable.***

• ***a équilibre attractif*** : il existe un voisinage U_1 de a tel que : $\forall x \in U_1$,
 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_1(t, x) = a$.

Comme ψ^{-1} est continue, $\psi(U_1)$ est un voisinage U_2 de $\psi(a)$.

Soit $y \in U_2$. Comme on l'a déjà vu, on a $\forall t \geq 0, \phi_2[t, \psi(\psi^{-1}(y))] = \psi[\phi_1(t, \psi^{-1}(y))]$

Le 1^{er} membre vaut $\phi_2(t, y)$. Comme $\psi^{-1}(y)$ appartient à U_1 , la limite de $\phi_1(t, \psi^{-1}(y))$ vaut a quand $t \rightarrow \infty$. Mais ψ est continue, donc la limite du 2^e membre vaut $\psi(a)$ quand $t \rightarrow \infty$.

En résumé : $y \in U_2 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_2(t, y) = \psi(a)$, ce qui montre que ***l'équilibre $\psi(a)$ est attractif.***

Nous rappelons toutefois la réserve émise au § 3.2.3 : un équilibre ne conserve pas nécessairement son caractère attractif lors de la restriction du flot à un de ses voisinages. La même remarque vaut pour les équilibres répulsifs.

• ***a équilibre répulsif*** :

Par un raisonnement identique au précédent, on établit que dans ce cas ***l'équilibre $\psi(a)$ est répulsif.***

En raison de la symétrie de la conjugaison, les trois implications que nous venons d'établir sont des équivalences. Il résulte alors des définitions des divers types d'équilibre que si a est un point de Ω_1 :

$a \in \Omega_1$ et son image $\psi(a) \in \Omega_2$ sont de même nature :

- soit tous deux réguliers ;
- soit tous deux équilibres simplement stables ;
- soit tous deux équilibres attractifs ;
- soit tous deux équilibres répulsifs ;
- soit tous deux équilibres asymptotiquement stables ;
- soit tous deux équilibres instables.

Exercice 3.4 Un équilibre instable peut-il attirer tout Ω ?

Soit a équilibre instable de Ω .

1. $\Omega = \mathbb{R}$. Par définition : a instable $\iff \exists \varepsilon$ tel que pour tout $\eta > 0$, il existe $x_1 \in]a - \eta, a + \eta[$ et $t_1 > 0$ tels que $|\phi(t_1, x_1) - a| > \varepsilon$. Si l'on prend $\eta < \varepsilon$,

alors $|\phi(t_1, x_1) - a| > \varepsilon > \eta > |x_1 - a|$: le descendant $\phi(t_1, x_1)$ de x_1 s'est éloigné de a . L'état x ne pourra pas revenir vers a , ce qui montre que a n'attire pas $\phi(t_1, x_1) > x_1$. Il n'attire donc pas *a fortiori* $\Omega = \mathbb{R}$. Nous retenons que :

pour $\Omega = \mathbb{R}$, un équilibre instable ne peut pas attirer Ω .

(mais il peut attirer $\mathbb{R}_-$, comme le montre l'exemple $\dot{x} = x^2$)

2. $\Omega = \mathbb{R}^2$. L'exemple « point d'interrogation » (voir § 3.2.3, figure 3.2) montre que ***pour $\Omega = \mathbb{R}^2$, un équilibre instable peut attirer Ω .***

CHAPITRE 4

Exercice 4.1 Flot explicite sur un sous-espace invariant

1. La matrice N^k est formée de zéros, à l'exception de la k -ième surdiagonale formée de « 1 ».

Ceci permet d'expliciter le flot réduit au sous-espace E_i :

$$\phi(t, x_0) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{p-2}}{(p-2)!} & \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{p-3}}{(p-3)!} & \frac{t^{p-2}}{(p-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t & t^2/2! \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} x_0$$

2. On a $Kt = \begin{pmatrix} \Lambda t & & & & \\ & \Lambda t & & & \\ & & \Lambda t & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \Lambda t \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & t & 0 & & \\ & 0 & 0 & t & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & t \\ & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}}_{=tN}$

N est ici la matrice p -nilpotente de dimension $2p \times 2p$ constituée de zéros, à l'exception de la 2^e surdiagonale constituée de « 1 ».

On a $e^{Kt} = \begin{pmatrix} e^{\Lambda t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\Lambda t} \end{pmatrix} \times \left[I + tN + \frac{t^2}{2!}N^2 + \dots + \frac{t^{p-1}}{(p-1)!}N^{p-1} \right]$ car tN est p -nilpotente.

Or, $e^{\Lambda t} = e^{\mu t} R$, avec $R = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}$.

On obtient ainsi le flot réduit au sous-espace E_j :

$$\phi(t, x_0) = e^{\mu t} \begin{pmatrix} R & tR & \frac{t^2}{2!}R & \dots & \dots & \frac{t^{p-1}}{(p-1)!}R \\ & R & tR & \frac{t^2}{2!}R & & \vdots \\ & & R & tR & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!}R \\ & & & & R & tR \\ & & & & & R \end{pmatrix} x_0$$

Exemple : $(\mu, \omega, p) = (-2, 5, 3)$. Alors, $\dim E_j = 2p = 6$, et l'on a :

$$\phi(t, x_0) = e^{-2t} \begin{pmatrix} \cos 5t & -\sin 5t & t \cos 5t & -t \sin 5t & (t^2/2!) \cos 5t & -(t^2/2!) \sin 5t \\ \sin 5t & \cos 5t & t \sin 5t & t \cos 5t & (t^2/2!) \sin 5t & (t^2/2!) \cos 5t \\ 0 & 0 & \cos 5t & -\sin 5t & t \cos 5t & -t \sin 5t \\ 0 & 0 & \sin 5t & \cos 5t & t \sin 5t & t \cos 5t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos 5t & -\sin 5t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin 5t & \cos 5t \end{pmatrix} x_0$$

Exercice 4.2 Deux exemples d'endomorphismes $\psi(a, b)$

- La matrice A étant déjà donnée sous forme bloc-diagonale de Jordan, on identifie immédiatement :
 - les **valeurs propres complexes** $\pm i$ correspondant au sous-espace invariant E_1 de dimension 2 engendré par $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, 0)$;
 - la **valeur propre réelle** $-1/10$ correspondant au sous-espace invariant E_2 de dimension 1 engendré par $(0, 0, 1)$.

2. L'expression du flot est $\phi(x, x_0) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t/10} \end{pmatrix} x_0$.

On en déduit immédiatement :

$$\phi(t, c_1) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ e^{-t/10} \end{pmatrix} \text{ (trajectoire hélicoïdale),}$$

$$\phi(t, c_2) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (trajectoire circulaire),}$$

$$\text{et } \phi(t, c_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-t/10} \end{pmatrix} \text{ (trajectoire rectiligne).}$$

3. Nous avons $\psi(c_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, d'où $\psi(c_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{Utilisant } \psi(c_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \psi(c_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

il vient : $\psi(c_1, c_2) = \psi(c_2)\psi(c_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui est la **projection sur E_1 parallèlement à E_2** .

$\psi(c_1, c_3) = \psi(c_3)\psi(c_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, qui est la **projection sur E_2 parallèlement à E_1** .

CHAPITRE 5

Exercice 5.1 Trajectoires, orbites et plages temporelles d'un flot sur $\mathbb{R}$

1. Soit x régulier. L'application $t \in J(x) \mapsto \phi(t, x)$, continue et strictement monotone, transforme $J(x)$ en un intervalle ouvert $Orb(x) =]c, d[$ formé de points réguliers et éventuellement non-borné ; s'ils sont bornés, c et d sont des équilibres car sinon, on pourrait étendre la solution temporellement au-delà de $J(x)$ et spatialement au-delà de $]c, d[$. Or, le plus grand intervalle $]a, b[$ contenant x et formé de points réguliers contient $]c, d[$. Il coïncide donc avec $]c, d[$. D'où $Orb(x) =]a, b[$.

Remarques

- (a) l'assertion $Orb(x) \subset]a, b[$ n'est plus valable si f n'est pas localement lipschitzienne, car alors la trajectoire peut « franchir » des équilibres. Il n'y a plus nécessairement unicité des orbites. Celles-ci, tout en demeurant des intervalles, ne sont pas nécessairement des ouverts.
- (b) $a = \sup\{z \in \mathcal{E} ; z < x\}$ si ce $\sup$ existe, sinon $a = -\infty$
 $b = \inf\{z \in \mathcal{E} ; z > x\}$ si ce $\inf$ existe, sinon $b = +\infty$
2. Sur $]a, b[$, $f(x)$ est non-nulle et continue, donc de signe constant : par conséquent, le déplacement de $x(t)$ sur $\mathbb{R}$ se fait intégralement vers la droite (si $f > 0$) ou vers la gauche (si $f < 0$). Autrement dit, le flot $t \in J(x) \mapsto \phi(t, x)$ est *monotone*. Il l'est *strictement*, sans quoi f s'annulerait sur une partie de $]a, b[$.
3. (a) • Soit x régulier et $J(x) =]t_i, t_f[$. On a $b \in \mathbb{R}$, et $f(b) = 0$.
Hypothèse : $t_f < +\infty$. Le flot étant monotone (question 2), $\phi(t, x)$ tend vers b quand $t \rightarrow t_i^+$ ou quand $t \rightarrow t_f^-$: adoptons cette dernière éventualité (le cas $t \rightarrow t_f^-$ se traite de façon semblable). Si $t_f \neq +\infty$, les deux trajectoires :

$$\begin{cases} t \in]t_i, t_f[\mapsto \phi(t, x) \\ t \geq t_f \mapsto b \end{cases} \quad \text{et } t > t_i \mapsto b$$
sont distinctes car pour $t = 0$ la première vaut x et la seconde b , distinct de x . Mais elles se coupent pour $t \geq t_f$, ayant alors la même valeur b . Ceci contredit le théorème de Cauchy. Il faut donc rejeter l'hypothèse $t_f < +\infty$.
De la même manière, on rejette $t_i > -\infty$, d'où $J(x) = \mathbb{R}$.
- Si maintenant x est un équilibre, on a de façon évidente $Orb(x) = \{x\}$ et $J(x) = \mathbb{R}$. En résumé :
- La plage temporelle $J(x)$ de tout point x d'orbite bornée est $\mathbb{R}$ entier.**
- (b) Si $Orb(x)$ n'est pas bornée, trois cas sont possibles :
- $J(x) = \mathbb{R}$: c'est le cas par exemple pour tout système linéaire $\dot{x} = \alpha x$, ou pour $\dot{x} = 1$;
 - $J(x)$ est une demi-droite ouverte : c'est le cas par exemple du système $\dot{x} = x^2$. La plage temporelle est illimitée à droite si $x_0 < 0$ (il y a alors naissance implosive à $t = 1/x_0$), à gauche si $x_0 > 0$ (il y a alors mort explosive à $t = 1/x_0$) ;
 - $J(x)$ est un intervalle ouvert borné : c'est le cas par exemple du système $\dot{x} = x^2 + 1$ étudié au § 1.2.1. On retiendra en résumé que :

La plage temporelle $J(x)$ d'un point x d'orbite non bornée peut être $\mathbb{R}$ entier, une demi-droite ouverte ou un intervalle ouvert borné.

Problème 5.1 Points d'inflexion des orbites

1. La composante radiale de $\dot{z}$, proportionnelle à $x^2 + y^2 - \mu$, est nulle si $\rho = \sqrt{\mu}$ pour $\mu > 0$ (avec $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$). Donc, **pour $\mu > 0$, le cercle $\rho = \sqrt{\mu}$ est invariant par le flot.**

En un équilibre, on a nécessairement $\rho = Cte$, d'où $\rho = 0$ ou $\rho = \sqrt{\mu}$ si $\mu > 0$. La première valeur correspond à l'équilibre 0, la seconde à l'orbite circulaire de période 2π précédemment identifiée, qui ne comporte aucun équilibre. Par conséquent, **pour tout μ , $\mathcal{E} = \{0\}$.**

Nota : cet équilibre est instable et répulsif si $\mu \leq 0$, asymptotiquement stable si $\mu > 0$.

2. Le flot est centrifuge pour $\rho > \sqrt{\mu}$, centripète pour $\rho < \sqrt{\mu}$, d'où les portraits :

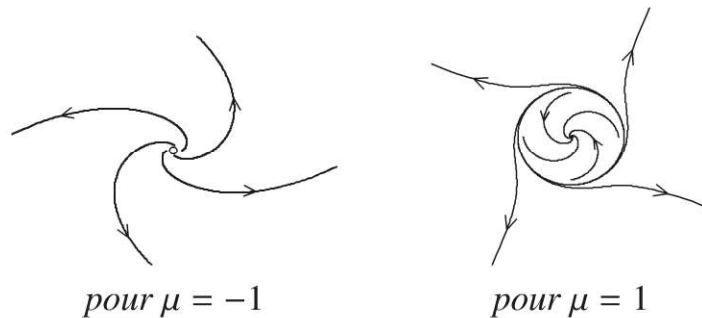


Figure 14.5

3. courbure : les points d'inflexion au sens large sont les points de courbure nulle. Or annuler la courbure conduit à annuler $f \wedge (\nabla f \cdot f)$, ce qui fournit en outre les équilibres. On obtient d'abord :

$$\nabla f \cdot f = \begin{pmatrix} 3x^5 + 6x^3y^2 + 3xy^4 - 4\mu x^3 - 2x^2y - 4\mu xy^2 - 2y^3 + (\mu^2 - 1)x + 2\mu y \\ 3y^5 + 6x^2y^3 + 3x^4y - 4\mu y^3 + 2xy^2 - 4\mu x^2y + 2x^3 + (\mu^2 - 1)y - 2\mu x \end{pmatrix}$$

Ensuite, le produit vectoriel de f par l'expression précédente fournit *a priori* un polynôme de degré 8 ; mais en raison des symétries du problème, l'expression (assez lourde !) se simplifie en un polynôme de degré 6 :

$$f \wedge (\nabla f \cdot f) = (x^2 + y^2) [1 + \mu^2 - (x^2 + y^2)^2]$$

Le fait que l'expression soit fonction de ρ^2 découle simplement de la symétrie de révolution du champ. $x^2 + y^2 = 0$ fournit l'équilibre 0, qui n'est pas un point d'inflexion. Les points d'inflexion s'obtiennent en annulant le 2^e facteur, soit $(x^2 + y^2)^2 = 1 + \mu^2$. Leur lieu est donc **le cercle $C(0, \sqrt[4]{1 + \mu^2})$.**

4. Remarques

- (a) Quelle que soit la valeur de μ , la courbure est positive (la trajectoire « tourne à gauche ») pour $\rho < \sqrt[4]{1+\mu^2}$, négative (la trajectoire « tourne à droite ») pour $\rho > \sqrt[4]{1+\mu^2}$.
- (b) Comme $\dot{\rho}$ croît en ρ^2 à l'infini, il y a mort explosive. L'angle θ est fonction affine du temps. La mort explosive à un θ limite survient après changement de signe de la courbure pour les trajectoires concernées (toutes pour $\mu \leq 0$).
- (c) Le flot présente une symétrie de révolution : si R représente une rotation plane autour de 0, $f(Rz) = R(f(z))$. Il en résulte que l'ensemble cherché en question 2 était nécessairement composé de cercles de centre 0.
- (d) À la traversée de la valeur $\mu = 0$, l'équilibre 0 devient stable, et un cycle-limite apparaît. Il y a donc bifurcation, qui présente les caractéristiques de celle vue en cours : $\mu = 0$ correspond à une **bifurcation de Hopf** (voir le chapitre 9).

Exercice 5.2 Bendixson : nécessité de la simple connexité

1. $\text{Div } f = \frac{\partial(\dot{x})}{\partial x} + \frac{\partial(\dot{y})}{\partial y} = 3x^2 + y^2 - 1 + x^2 + 3y^2 - 1$, soit $\text{Div } f = 4(x^2 + y^2 - \frac{1}{2})$
2. Dans D , $x^2 + y^2 > \frac{9}{16}$, donc $\text{Div } f > 4(\frac{9}{16} - \frac{1}{2})$, c'est-à-dire $\text{Div } f > \frac{1}{4}$.

Sur le cercle unité, la dynamique se réduit à $f(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$, ce qui montre que ce cercle est décrit à vitesse constante. Donc **D contient le cercle unité, orbite périodique.**

Exercice 5.3 Équations d'orbites

1. La valeur propre -1 est double, mais l'espace propre correspondant, généré par le vecteur $(0, 1)$ (vérification élémentaire) n'est que de dimension 1, ce qui montre que le système **n'est pas semi-simple**.

Pour établir l'équation des trajectoires, le plus simple est d'écrire $A = -I + N$.

La matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ étant nilpotente, le développement de son exponentielle se réduit à deux termes. On a donc $e^{At} = e^{-t} e^{Nt} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix}$, d'où

$$z(t) = e^{At} z_0 = \begin{pmatrix} x_0 e^{-t} \\ -x_0 t e^{-t} + y_0 e^{-t} \end{pmatrix}.$$

La trajectoire correspondant à la condition initiale $z_0 = (1, 0)$ est donc $z(t) = (e^{-t}, -te^{-t})$, qu'on peut aussi écrire $z(t) = (x, x \ln x)$. L'orbite est donc d'équation **$y = x \ln x$** .

2. Pour tout λ réel, l'homothétique de rapport λ de l'orbite précédente est une orbite, correspondant en particulier à la condition initiale $z_0 = (\lambda, 0)$. Or, l'ensemble de ces orbites est le plan entier privé de la réunion $\{0\} \times \mathbb{R}^*$ des deux

orbites rectilignes, ce qui montre que *toute orbite non rectiligne est homothétique de l'orbite $y = x \ln x$* .

On remarquera que l'équilibre $\{(0, 0)\}$ en tant qu'orbite est obtenu pour $\lambda = 0$.

CHAPITRE 6

Exercice 6.1 Équilibre d'un système hamiltonien

1. Soit U_0 un voisinage de x_0 . L'hamiltonien H est strictement minimum en x_0 , de valeur $H_m = V_m$.

Il admet donc un minimum $H_m + \delta$ (avec $\delta > 0$) hors de U_0 . V étant continu, il existe un voisinage U_1 de q_0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que $q \in U_1 \implies V(q) < V_m + \delta/2$. De même, il existe un voisinage U_2 de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que $p \in U_2 \implies \|p\|^2/2 < \delta/2$. Soit $U_3 = U_1 \times U_2$; c'est un voisinage de x_0 dans $\mathbb{R}^{2n}$. Si $x \in U_3$, alors $H(x) < V_m + \delta/2 + \delta/2 = V_m + \delta$. Ceci implique $H(\phi(t, x)) < V_m + \delta$ car H est constant sur toute trajectoire. Donc, $x \in U_3 \implies \forall t \geq 0, \phi(t, x) \in U_0$.

Par conséquent, $x_0 = (q_0, 0)$ est un équilibre stable.

$$2. \quad (a) \quad f(x) = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ -\nabla V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \\ -\partial V / \partial q_1 \\ \vdots \\ -\partial V / \partial q_n \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où, avec } a_k = \frac{\partial^2 V}{\partial x_k^2}(q_0) \geq 0, \quad \nabla f_{x_0} = \begin{pmatrix} 0 & & 0 & 1 & & 0 \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & 0 & 0 & & 1 \\ -a_1 & & 0 & 0 & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & -a_n & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

- (b) Après échange convenable des vecteurs de base de $\mathbb{R}^{2n}$, la matrice ∇f_{x_0} devient bloc-diagonale, avec le bloc 2×2 suivant : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_1 & 0 \end{pmatrix}$, et un bloc $(2n-2) \times (2n-2)$.

Il en résulte que $\pm i \sqrt{a_1}$ sont valeurs propres. Or, ces valeurs propres sont attachées à la coordonnée généralisée q_1 mais toute q_i aurait pu être

baptisée q_1 . Le résultat s'étend donc à tout k : $\pm i \sqrt{a_k}$ est valeur propre. Le spectre de ∇f_{x_0} est donc $\text{Sp}(\nabla f_{x_0}) = \{\pm i \sqrt{a_1}, \dots, \pm i \sqrt{a_n}\}$.

3. Soit $x = (q, p) \neq x_0$

Si $p = 0$, alors $q \neq q_0$, d'où $V(q) > V(q_0)$ et $H(x) = V(q) > H(x_0)$

Si $p \neq 0$, alors $H(x) = \frac{\|p\|^2}{2} + V(q) \geq \frac{\|p\|^2}{2} + V_m > V_m = H(x_0)$

Dans les deux cas, $H(x) - H(x_0)$ est égal à une constante positive. Comme H reste constant sur une trajectoire, il en est de même pour $H[\phi(t, x)]$. En raison de la continuité de H , il n'est pas possible que $\phi(t, x)$ tende vers x_0 . En d'autres termes, *l'équilibre x_0 n'est pas asymptotiquement stable*.

Exercice 6.2 Un équilibre stable mais sans fonction de Liapounov

1. On a montré en exercice 3.2 que pour le système S , l'équilibre 0 est en même temps stable et centrifuge (en presque tout point, $\dot{x}$ est du signe de x). Ceci signifie qu'une fonction $H(x)$ de classe C^1 décroissante sur trajectoire (condition nécessaire pour être une fonction de Liapounov) doit être décroissante au sens large sur $\mathbb{R}_+$, croissante sur $\mathbb{R}_-$. Une telle fonction ne saurait présenter un minimum strict en 0. Bien au contraire, elle est maximale (au sens large) en 0. Donc, *il n'existe pas de fonction de Liapounov au voisinage de 0*.
2. Généralisation à $\mathbb{R}^n$: le corrigé de l'exercice 3.2 fournit à nouveau la solution : la fonction $f(x) = x \cdot \|x\|^2 \sin^2 \frac{1}{\|x\|}$, où $x \in \mathbb{R}^n$, définit un système linéaire de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ pour lequel l'équilibre 0 est stable et centrifuge. Le raisonnement fait en question précédente sur $\mathbb{R}$ s'applique.

Problème 6.1 Un système polynomial de dimension 2

1. Les équilibres du système sont donnés par $\begin{cases} \dot{x} = y(1-y) = 0 \\ \dot{y} = x(1-x) = 0 \end{cases}$, ce qui fournit les quatre équilibres : $e_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. (a) $f(y, x) = \begin{pmatrix} x(1-x) \\ y(1-y) \end{pmatrix}$ est le symétrique par rapport à D de $f(x, y)$.
Donc, *le flot est symétrique par rapport à D* .
(b) Pour $x = y$, $\dot{z} = \begin{pmatrix} x(1-x) \\ x(1-x) \end{pmatrix}$: $\dot{z}$ restant parallèle au vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, l'état ne peut évoluer que sur la droite D , qui est donc *invariante par le flot*.

(c) Sur D , le système se réduit à $\dot{x} = x(1-x)$. D'où $\frac{dx}{x(1-x)} = \frac{dx}{x} + \frac{dx}{1-x} = dt$, qui s'intègre, avec les conditions initiales $(t_0, x_0) = (0, -1)$, en :

$\ln(-x) - \ln(-x_0) - \ln(1-x) + \ln(1-x_0) = t$, c'est-à-dire :

$$\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = t - \ln 2. \text{ Donc, } \frac{x}{x-1} = \exp(t - \ln 2) = \frac{1}{2} e^t$$

On a par conséquent : $x(t) = \frac{e^t}{e^t - 2}$:

cette solution **explose pour $t_1 = \ln 2$** .

3. (a) Nous avons $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1-2y \\ 1-2x & 0 \end{pmatrix}$, et par conséquent :

$$\nabla f(e_0) = \nabla f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \nabla f(e_1) = \nabla f(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(e_2) = \nabla f(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \nabla f(e_3) = \nabla f(0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les équilibres e_0 et e_2 sont associés aux valeurs propres $+1$ et -1 et sont donc **instables** pour les systèmes linéarisés.

Les équilibres e_1 et e_3 sont associés aux valeurs propres $+i$ et $-i$ et sont donc **simplement stables** pour les systèmes linéarisés.

(b) • e_0 et e_2 sont hyperboliques de même indice $(1, 0, 1)$. D'après le 2^e théorème de Liapounov, ils sont aussi **instables pour S** .

• e_1 et e_3 sont non-hyperboliques de même indice $(0, 2, 0)$. On ne peut à ce stade **rien conclure** quant à leur stabilité pour le système S .

4. L'isocline horizontale I_h est donnée par $\dot{y} = 0$ et $\dot{x} \neq 0$. C'est donc la réunion des droites $x = 0$ et $x = 1$, privée des équilibres.

L'isocline verticale I_v est donnée par $\dot{x} = 0$ et $\dot{y} \neq 0$. C'est donc la réunion des droites $y = 0$ et $y = 1$, privée des équilibres.

5. On ne sait pas à ce stade s'il existe des orbites périodiques autour de e_1 et e_3 , ni si ces équilibres sont ou non asymptotiquement stables. On ne connaît pas non plus les conditions de naissance implosive et de mort explosive. Voici une esquisse du portrait de phases du système :

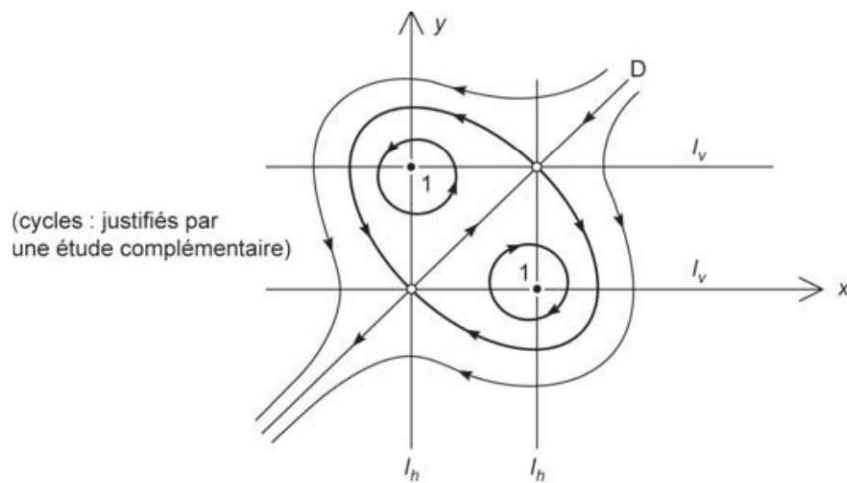


Figure 14.6

Exercice 6.3 Une résonance en dimension 2

1. On a $\nabla f(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2x & 2 \end{pmatrix}$.

On obtient le linéarisé S_L en $z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = z_1$: $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Le système est hyperbolique d'indice $(0, 0, 2)$, donc **instable**. D'après le théorème de Hartman-Grobman, z_1 est également un équilibre **instable** de S .

2. Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$. Cet exemple est traité dans le paragraphe 6.5.2 : on a une **résonance d'ordre $k = 2$** .
3. Notant (x_0, y_0) les coordonnées du point $z_0 = z(0)$, on a $x(t) = x_0 e^t$, d'où $\dot{y} = 2y + x^2 = 2y + x_0^2 e^{2t}$. Si on cherche $y(t)$ sous la forme $\varphi(t) e^{2t}$, on obtient $\dot{\varphi} = x_0^2$, d'où $\varphi(t) = x_0^2 t + C$; $y(0) = y_0$ fournit $C = y_0$, d'où $y(t) = (y_0 + x_0^2 t) e^{2t}$,

et l'expression du flot est $\phi(t, z_0) = \begin{pmatrix} x_0 e^t \\ (y_0 + x_0^2 t) e^{2t} \end{pmatrix}$

- Pour $x_0 \neq 0$, on a l'équation de l'orbite du point z_0 : $y = x^2 \ln x + m_0 x^2$, avec $m_0 = (y_0/x_0^2) - \ln x_0$. Ces courbes sont toutes tangentes en z_1 à l'axe des abscisses.
- Pour $x_0 = 0$ et $y_0 \neq 0$, les deux demi-axes des ordonnées sont des orbites.
- Enfin, l'équilibre z_1 constitue une orbite.

Ce qui précède justifie l'allure du portrait de phases esquissé par la figure 6.5.a.

Remarques

- (a) La courbe $y = x^2 \ln x$ est tangente à l'axe des x , admet le minimum $-1/(2e)$ pour $x = 1/\sqrt{e}$, passe par le point $(1, 0)$ puis admet une branche parabolique verticale.
- (b) Tous les minima sont placés sur la parabole $y = -x^2/2$.
- (c) Une étude complémentaire montrerait qu'il existe une conjugaison de classe C^1 entre S et S_L (ce qui est plus précis que le théorème de Hartman-Grobman), mais qu'il n'en existe pas de classe C^2 , bien que f soit polynômiale donc de classe C^∞ .
Ceci peut se pressentir en observant que la courbure des orbites en z_1 est infinie.

Problème 6.2 Un système de dimension 2

1. $f(0) = 0 \implies 0$ est un équilibre. Mais pour $z \neq 0$, la 2^e coordonnée de f dans $\mathcal{R}_1$ étant alors non-nulle, z n'est pas un équilibre.

L'unique équilibre est donc $z = 0$.

2. La dérivée temporelle de F est égale au produit scalaire $\nabla F \cdot f$.
Les iso- F étant les cercles de centre 0, ∇F est radial, de mesure 2ρ selon $\vec{u}$.
Par conséquent, $\nabla F \cdot f = \begin{pmatrix} 2\rho \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} \cdot \rho \begin{pmatrix} (1-\rho)(\rho-2) \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} = 2\rho^2(1-\rho)(\rho-2)$
On peut aussi établir ce résultat à partir de $\dot{F} = 2\rho\dot{\rho}$. Dans le disque unité ouvert, cette fonction est strictement négative hors de 0, nulle en 0.

Par conséquent, ***F est une fonction de Liapounov dans le disque $\rho < 1$.***

3. Il résulte immédiatement de la question précédente que

l'équilibre 0 est ***asymptotiquement stable***.

4. Comme tout système unidimensionnel, le système $\dot{\rho} = \rho(1-\rho)(\rho-2)$ ne compte que ses équilibres comme trajectoires périodiques au sens large (plus précisément : les trajectoires $t \mapsto a$, où a est un équilibre).
Le système S ne peut donc présenter comme trajectoires périodiques que celles correspondant à $\rho = 0, 1$ ou 2 . Or, en tout point de $\mathbb{R}^{2*}$, on a $\dot{\theta} = 1$.
Les cercles $\rho = 1$ et $\rho = 2$ sont donc des trajectoires décrites à vitesse constante (respectivement 1 et 2) dans le sens direct : ils correspondent à des trajectoires périodiques, de même période 2π .
En résumé, outre la trajectoire $t \mapsto 0$, qui admet tout réel positif comme période, le système compte ***deux trajectoires circulaires concentriques*** de même période 2π .

5. Propriétés des trajectoires.

- Les 2 trajectoires périodiques sont des ***cycles-limites*** (voir § 7.2.2 pour les définitions) :
 - * pour $t \rightarrow -\infty$ pour le cercle $\rho = 1$ (cycle α -limite) ;
 - * pour $t \rightarrow +\infty$ pour le cercle $\rho = 2$ (cycle ω -limite).
- Pour $\rho \leq 2$, la plage temporelle de définition de tout état est $\mathbb{R}$ entier.
 Pour $\rho > 2$, il y a ***naissance implosive*** à un instant déterminé t_0 , car pour $\rho \rightarrow -\infty$, $\dot{\rho}$ est équivalent à $-\rho^3$. L'orbite admet pour $t \rightarrow t_0^+$ une branche infinie de ***direction asymptotique*** $\theta(t_0)$.
- Toute transformée d'une orbite par rotation autour de 0 est une orbite.

6. Portrait de phases :

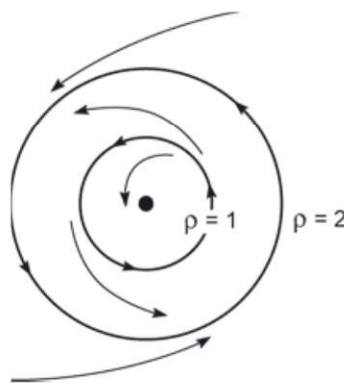


Figure 14.7

CHAPITRE 7

Exercice 7.1 Deux définitions équivalentes de l'ensemble-limite

Posons :

- $\omega(x) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\{\phi(s, x), s \geq t\}}$
 - $\tilde{\omega}(x)$ = ensemble des point y de Ω tels qu'il existe une suite réelle (t_n) tendant vers $+\infty$, avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n, x) = y$
- Soit $y \in \omega(x)$: alors, $\forall t \geq 0$, $y \in \overline{\{\phi(s, x), s \geq t\}}$. Pour alléger l'écriture, nous noterons $\phi_{t^+} = \{\phi(s, x), s \geq t\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $y \in \overline{\phi_{n^+}}$. Donc, la distance de y à ϕ_{n^+} est nulle. Ceci signifie qu'il existe $t_n \geq n$ tel que $d(y, \phi(t_n, x)) \leq \frac{1}{n}$. La suite t_n tendant vers l'infini, $y \in \tilde{\omega}$. Donc, $\omega(x) \subset \tilde{\omega}(x)$.

– Soit maintenant $y \in \widetilde{\omega}(x)$: alors, il existe une suite (t_n) tendant vers l'infini telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\phi(t_n, x)}_{x_n} = y$.

Donc, pour tout $t \geq 0$, l'ensemble $\{t_n; t_n > t\}$ est infini. Ceci entraîne $d(y, \phi_{t^+}) = 0$, c'est-à-dire $y \in \overline{\phi_{t^+}}$. Comme cette relation vaut pour tout t , on a $y \in \bigcap_{t \geq 0} \overline{\phi_{t^+}}$, c'est-à-dire $y \in \omega(x)$. Donc, $\widetilde{\omega}(x) \subset \omega(x)$.

En conclusion, $\widetilde{\omega}(x) = \omega(x)$: les deux définitions sont *équivalentes*.

Exercice 7.2 Orbite non-bornée et ensemble-limite

On peut définir dans $\mathbb{R}^{2*}$ un système linéaire en x et en y instable dont les trajectoires sont des spirales logarithmiques issues du point $(0, 0)$. Si l'on transforme le système par un difféomorphisme appliquant $\mathbb{R}^2$ sur le demi-plan d'ordonnée positive, par exemple $(x, y) \mapsto (x, z = e^y)$, on obtient des trajectoires qui admettent l'axe des x comme ensemble-limite.

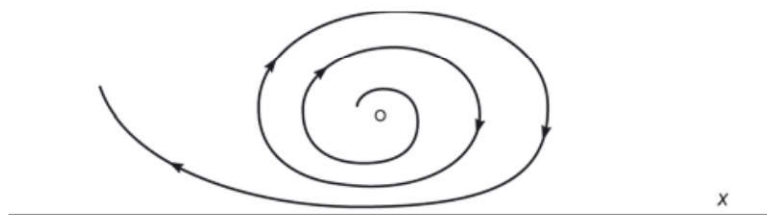


Figure 14.8

Exercice 7.3 Point isolé d'un ensemble-limite

On sait déjà qu'un ensemble-limite peut ne pas être connexe ; par exemple, il peut être (voir figure 7.3) constitué de deux droites parallèles. Mais dans ce cas, il ne contient aucun point isolé.

Hypothèse : $\omega(z_0)$ contient a isolé, et un autre point $b \neq a$.

Soit $V(a)$ un voisinage quelconque de a . Il contient une boule fermée $\overline{B(a, \varepsilon)}$ incluse dans $V(a)$ et de rayon positif $\varepsilon \leq d(a, b)/3$. Appelons B_a l'intérieur de cette boule, et B_b la boule ouverte $B(b, \varepsilon)$. La trajectoire $\phi(t, z_0)$ visite en des temps arbitrairement grands les boules disjointes B_a et B_b , donc aussi leurs frontières respectives C_a et C_b . Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists t_n \geq n$ tel que $z_n = \phi(t_n, z_0) \in C_a$. Comme C_a est compact, on peut extraire de la suite z_n une sous-suite qui converge vers un point z^* de C_a : ce point distinct de a appartient à $\omega(z_0) \cap V(a)$.

Or, on peut trouver un tel point dans tout voisinage de a . Ceci montre que **a n'est pas un point isolé** de $\omega(z_0)$. L'hypothèse initiale est à écarter, ce qui signifie que si $\omega(z_0)$ contient un point isolé a , alors il ne contient pas d'autre point :

Si $\omega(z_0)$ contient a isolé, $\omega(z_0) = \{a\}$.

Exercice 7.4 Composantes connexes d'un ensemble-limite

Hypothèse : $\omega(z_0)$ admet une partition en deux fermés : $\omega(z_0) = A \cup B$, dont A composante connexe bornée.

A étant compact, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow d(A, B) = d > 0$. L'ensemble $F = \{z \in \Omega ; d(z, A) = d/3\}$ est la frontière du voisinage V de A défini par $V = \{z \in \Omega ; d(z, A) < d/3\}$. Fermé et borné, F est compact. Or, la trajectoire $\phi(t, z_0)$ visite en des temps arbitrairement grands les ouverts disjoints V et W , où W est la boule $\mathcal{B}(b, d/3)$, avec b élément quelconque de B . Elle visite donc la frontière F de V en des temps arbitrairement grands.

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists t_n \geq n$ tel que $z_n = \phi(t_n, z_0) \in F$. Comme F est compact, on peut extraire de la suite z_n une sous-suite qui converge vers un point z^* de F : ce point n'appartient ni à A ni à B car il est distant d'au moins $d/3$ de chacun de ces deux ensembles. Or, il appartient à $\omega(z_0)$. Ceci est contradictoire avec le fait que $\omega(z_0) = A \cup B$. Donc, b ne peut pas exister. Par conséquent, si A est borné, $\omega(z_0) = A$.

En d'autres termes : *si $\omega(z_0)$ possède plusieurs composantes connexes, aucune n'est compacte.*

Si $\omega(z_0)$ possède une composante connexe unique, celle-ci peut être compacte ou non.

Exercice 7.5 Un cas d'absence de cycles

1. La matrice A est déjà sous forme réduite de Jordan, ce qui permet d'associer le sous-espace central E_c aux quatre premières composantes, et le sous-espace stable E_s aux composantes suivantes.
 - Dans $E_c = \mathbb{R}^4$, les orbites sont portées par des produits cartésiens de cercles donc par des tores. Le seul équilibre y est 0 et est simplement stable.
 - Dans E_s , les orbites sont des demi-droites issues de 0 ; le seul équilibre dans E_s est encore 0.

Donc **0 est simplement stable** ; étant l'unique équilibre de S , il est **isolé**.

2. Si $\alpha = p/q$, fraction irréductible, l'orbite de tout élément de E_c est périodique de période $2\pi q$. En revanche, si α est **irrationnel**, les trajectoires dans E_c sont presque-périodiques : elles sont denses sur des tores de E_c , mais **ne sont pas périodiques**. Il en est de même *a fortiori* pour les trajectoires dans $\mathbb{R}^n$, car leurs composantes de rangs $5, \dots, n$ sont à décroissance exponentielle, et ne permettent donc aucune périodicité.

Problème 7.1 Variétés stable et instable

1. (a) On a $\nabla f(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6x & -1 \end{pmatrix}$, d'où $\nabla f(z_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, endomorphisme hyperbolique d'indice $(1, 0, 1)$.
 (b) z_0 est un point-selle (ou col) de S_L , donc un équilibre *instable*. D'après le théorème de Hartman-Grobman, il est de même nature *instable* pour S .
2. (a) Tout point de V_1 a une abscisse nulle : il en est de même de tous ses ascendants et descendants car alors $\dot{x} = x = 0$. Donc V_1 est bien invariant par le flot.
 (b) Le bassin d'attraction de z_0 , noté $Att(z_0)$, inclut V_1 , et ne comprend aucun autre point (tout point hors V_1 voit ses descendants s'éloigner indéfiniment de V_1 par $\dot{x} = x$). Donc, $Att(z_0) = V_1$. Mais comme z_0 est un équilibre hyperbolique, $V_s(z_0) = Att(z_0)$. On a donc bien $V_1 = V_s(z_0)$.
 (c) La variété stable $V_s(z_0) = V_1$ est constituée de **3 orbites** : la demi-droite $(x = 0 ; y > 0)$, la demi-droite $(x = 0 ; y < 0)$ et l'équilibre z_0 .
3. (a) $z_1 \in V_2$ est de la forme $z_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1^2 \end{pmatrix}$. Alors, $\dot{z}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1^2 + 3x_1^2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2x_1 \end{pmatrix}$. Ce vecteur étant parallèle à la tangente à V_2 en z_1 , **V_2 est invariante par le flot**.
 (b) Pour tout point z_1 de V_2 , il résulte de la tendance exponentielle triviale de l'abscisse vers 0 quand $t \rightarrow -\infty$ que $\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t, z_1) = z_0$. Donc, $V_2 \subset Rep(z_0)$ (bassin de répulsion de z_0). On vérifie que $Rep(z_0)$ ne contient aucun point hors V_2 , ce qui montre que cette parabole est la variété instable de z_0 : **$V_2 = V_u(z_0)$** .
 (c) La variété instable $V_u(z_0) = V_2$ est constituée de **3 orbites** : la demi-parabole $(x > 0 ; y = x^2)$, la demi-parabole $(x < 0 ; y = x^2)$ et l'équilibre z_0 .

Complément (hors énoncé) :

- Un portrait de phases est esquissé en figure 7.10 (§ 7.3). On peut en affiner la description en déterminant l'isocline I_h , ensemble des points du plan où la tangente à l'orbite est horizontale : I_h est déterminé par $(\dot{x} \neq 0, \dot{y} = 0)$, c'est-à-dire $(x \neq 0, y = 3x^2)$. Donc I_h est la parabole $y = 3x^2$ privée du point z_0 .
- (S) se résout analytiquement. Pour l'état initial z_1 :

$$\phi(t, z_1) = \begin{pmatrix} x_1 e^t \\ x_1^2 e^{2t} + (y_1 - x_1^2) e^{-t} \end{pmatrix}$$

On constate qu'un état initial z_1 sur la parabole $y = x^2$ conduit à $\phi(t, z_1) = \begin{pmatrix} x_1 e^t \\ (x_1 e^t)^2 \end{pmatrix}$, ce qui confirme l'invariance de cette parabole par le flot.

Problème 7.2 Variétés centrales

1. (a) On a $\nabla f(z) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, d'où $\nabla f(z_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Le système linéarisé est donc $\dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} z$ (S_L). Il est non hyperbolique, d'indice $(1, 1, 0)$. Le sous-espace stable E_s est engendré par $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, le sous-espace central E_c par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- (b) L'ensemble des équilibres de S_L est l'axe des x , soit $\mathbb{R} \times \{0\}$. Tous les équilibres, donc en particulier z_0 , sont *simplement stables*.

z_0 est en revanche le *seul* équilibre de S . Il est *instable* pour S car tout voisinage de z_0 contient un point d'abscisse strictement positive, dont les descendants verront leur abscisse tendre vers $+\infty$ quand t tend vers sa valeur maximale (voir question 2.b).

2. (a) Abscisse et ordonnée se calculent indépendamment l'une de l'autre : $\dot{x} = x^2$ s'intègre en $x(t) = \frac{x_1}{1 - t x_1}$ et $\dot{y} = -y$ en $y(t) = y_1 e^{-t}$, d'où

$$\phi(t, z_1) = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{1 - t x_1} \\ y_1 e^{-t} \end{pmatrix}$$

- (b) De l'expression analytique du flot, on déduit immédiatement celle de la plage temporelle, conditionnée seulement par la valeur de x_1 :

$$\begin{aligned} \text{pour } x_1 < 0 \quad J(x_1, y_1) &= \left] \frac{1}{x_1}, +\infty \right[\quad \text{naissance implosive à l'instant } \frac{1}{x_1} < 0 \\ \text{pour } x_1 = 0 \quad J(x_1, y_1) &= \mathbb{R} \\ \text{pour } x_1 > 0 \quad J(x_1, y_1) &= \left] -\infty, \frac{1}{x_1} \right[\quad \text{mort explosive à l'instant } \frac{1}{x_1} > 0 \end{aligned}$$

3. Pour cette question, on se reportera à la figure 7.11.

- (a) Hors de l'axe des ordonnées, $t = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x}$, d'où $y = y_1 e^{-t} =$, soit $y = (y_1 e^{-1/x_1}) e^{1/x}$

- (b) Toute « orbite gauche », orbite correspondant à $x_1 < 0$, est tangente en z_0 à l'axe des abscisses et asymptote à la droite $y = y_1 e^{-1/x_1}$ (naissance implosive à $t = 1/x_1$). Toute « orbite droite », orbite correspondant à $x_1 > 0$,

est asymptote à l'axe des ordonnées et à la droite $y = y_1 e^{-1/x_1}$: ceci peut se déduire soit de la question 3.a) soit du caractère explosif de la solution, qui impose $y(t = 1/x_1)$ comme valeur limite de y .

Il en résulte que **toute réunion** d'une « orbite gauche » et de la demi-droite $\mathbb{R}_+ \times \{0\}$ est une variété de dimension 1 tangente en z_0 à l'axe des abscisses, lui-même parallèle au sous-espace central E_c de S_L . C'est donc une **variété centrale**. Il y a autant de telles variétés que d'orbites gauches, donc une infinité.

Complément (hors énoncé) : toutes les orbites du demi-plan $x < 0$ sont homologues par affinité. L'annulation de d^2y/dx^2 fournit l'abscisse de leurs points d'inflexion, qui vaut $-1/2$. L'orbite passant par (x_1, y_1) admet la droite $y = y_1 e^{-1/x_1}$ comme asymptote.

De même, toutes les orbites du demi-plan $x > 0$ sont homologues par affinité. Comme dans le cas précédent, l'orbite passant par (x_1, y_1) admet la droite $y = y_1 e^{-1/x_1}$ comme asymptote.

Exercice 7.6 Tangentes aux orbites d'une variété remarquable

- a) Sur $\mathbb{R}$, les orbites du système $\dot{x} = 0$ sont des points. Aucune n'ayant donc de tangente en 0, la réunion des tangentes évoquée dans l'énoncé est **vide**. Cependant, $V_c(0) = \mathbb{R}$.

Autre exemple : les orbites du système plan $\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x$ sont des spirales ou $\{0\}$.

Aucune n'ayant de tangente en 0, la réunion des tangentes est **vide**. Cependant, $V_s(0) = \mathbb{R}^2$.

- b) Les orbites du système plan $(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = (-x_1, -2x_2)$, à chacune desquelles on ajoute $\{0\}$, sont tangentes en $\{0\}$ soit à $(1, 0)$, soit à $(0, 1)$. La réunion des deux droites correspondantes est une **partie propre** de $V_s(0) = \mathbb{R}^2$.
- c) Pour le système $\dot{x} = -x$ où $x \in \mathbb{R}^n$, $V_s(0) = \mathbb{R}^n$, et la réunion évoquée dans l'énoncé est $\mathbb{R}^n$ **lui-même**.

CHAPITRE 8

Exercice 8.1 Naissance explosive, mort implosive

1. Ω est le produit cartésien du cercle (ou tore T^1), ensemble d'appartenance de la longitude, et de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$ (lui-même homéomorphe à $\mathbb{R}$), ensemble d'appartenance de la latitude. C'est donc un **cylindre**, muni de la topologie produit des topologies de T^1 et de $\mathbb{R}$.
2. $\dot{\varphi}$, inverse d'un nombre non-nul, ne s'annule lui-même jamais. Il en est de même du vecteur $\dot{z}$. Par conséquent, l'ensemble $\mathcal{E}$ des équilibres est **l'ensemble vide**.
3. Comme $\dot{\lambda} = 0$, on a $Orb(z_0) \subset \{\lambda_0\} \times \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$, méridien ouvert (c'est-à-dire privé des pôles) de longitude λ_0 . Comme en tout point de ce méridien ouvert $|\dot{z}|$ est bien défini et non-nul, $Orb(z_0)$ ne peut pas en être une partie propre. Par conséquent, $Orb(z_0)$ est le **méridien ouvert de longitude λ_0** .
4. Pour tout φ , on a $\dot{\varphi} > \frac{4}{\pi^2}$. Comme φ évolue sur un intervalle ouvert de longueur π , cet intervalle est décrit en un temps inférieur à $\frac{\pi}{4/\pi^2} = \frac{\pi^3}{4}$, également réparti sur les deux hémisphères. Il y a donc :
 - naissance à un instant négatif $t_i > -\frac{\pi^3}{8}$: la vitesse $|\dot{z}| = |\dot{\varphi}|$ tend vers $+\infty$ lorsque $t \rightarrow t_i^+$. Alors, z_0 tend vers le pôle sud, qui appartient à l'adhérence $\overline{\Omega}$ de Ω : il y a **naissance explosive** au pôle sud.
 - mort à un instant positif $t_f < \frac{\pi^3}{8}$: $|\dot{z}| = |\dot{\varphi}|$ tend vers $+\infty$ lorsque $t \rightarrow t_f^-$. Alors, z_0 tend vers le pôle nord, qui appartient à l'adhérence $\overline{\Omega}$ de Ω : il y a **mort implosive** au pôle nord.

Exercice 8.2 Pour $\alpha \notin \mathbb{Q}$, la distance de $\alpha\mathbb{Z}^*$ à $\mathbb{Z}$ est nulle

1. Remarquons d'abord que $\delta \in]0, \frac{1}{2}[$; donc, Δ est un entier au moins égal à 2, et on a $\frac{1}{\delta} = \Delta + \theta$, avec $\theta \in]0, 1[$

$$\Delta\alpha = \Delta(m + \delta) = \underbrace{\Delta m + 1}_{\in \mathbb{Z}} - \delta\theta.$$

$$(\Delta + 1)\alpha = (\Delta + 1)(m + \delta) = \underbrace{(\Delta + 1)m + 1}_{\in \mathbb{Z}} + \delta(1 - \theta)$$

Donc, $d(\Delta\alpha, \mathbb{Z}) = \delta\theta (< 1/2)$ et $d((\Delta + 1)\alpha, \mathbb{Z}) = \delta(1 - \theta) (< 1/2)$

θ et $1 - \theta$ appartiennent à $]0, 1[$ et sont de somme 1 ; par conséquent, l'un des deux appartient à $]0, \frac{1}{2}]$.

$$\text{Il en résulte que } \boxed{\text{Min}[d(\Delta\alpha, \mathbb{Z}), d((\Delta + 1)\alpha), \mathbb{Z}] \leq \frac{\delta}{2}}$$

En d'autres termes : tout irrationnel a un multiple entier au moins deux fois plus proche que lui de $\mathbb{Z}$.

2. D'après la 1^{re} question, il existe un multiple entier α_1 de α deux fois plus proche de $\mathbb{Z}$ que ne l'est α . Mais α_1 étant lui-même irrationnel, il existe α_2 , multiple entier de α_1 (donc de α) au moins deux fois plus proche de $\mathbb{Z}$ que ne l'est α_1 . On définit ainsi la suite $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $d(\alpha_k, \mathbb{Z}) \leq \frac{\delta}{2^k}$. Comme tous les α_k sont des multiples entiers de α , on a établi le résultat :

$$\boxed{\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \implies d(\alpha \mathbb{Z}^*, \mathbb{Z}) = 0}$$

Dans cette implication, $\alpha \mathbb{Z}^*$ représente $\{\alpha m ; m \in \mathbb{Z}^*\}$ et d est la distance entre deux ensembles (voir « espaces métriques » en annexe 2).

Notons que réciproquement, si α est rationnel, $\alpha = p/q$ avec $p \in \mathbb{Z}^*$ et $q \in \mathbb{Z}_+^*$ premiers entre eux. On a alors $d(\alpha \mathbb{Z}^*, \mathbb{Z}) = 1/q \neq 0$.

Il découle aussi du résultat établi que si α est un irrationnel du cercle des réels modulo 1 (ou tore T^1), l'ensemble des multiples entiers de α est dense dans T^1 .

Problème 8.1 Flot hélicoïdal sur le tore

1. $\boxed{b = c = 0}$ L'analyse est triviale : ***tout point est un équilibre***.
2. $\boxed{b = 0, c \neq 0}$ Dans ce cas, le déplacement plan est vertical à vitesse constante. Sur le tore T , l'orbite est le produit cartésien d'un tore T^1 à une dimension, c'est-à-dire un cercle, par un point : la trajectoire est un ***cercle décrit à vitesse constante*** (traduction de l'égalité $\dot{y} = c$).

$\boxed{b \neq 0, c = 0}$ Ce cas se traite de façon analogue.

On obtient ici aussi un ***cercle décrit à vitesse constante***.

Si on identifie T à un tore euclidien classiquement considéré comme plongé dans $\mathbb{R}^3$ euclidien, les cercles $b = 0$ et $c = 0$ forment deux familles distinctes, orthogonales.

3. $\boxed{b \neq 0, \frac{c}{b} \in \mathbb{Q}^*}$ On a $\dot{z} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c = \frac{p}{q} b \end{pmatrix}$, avec $(p, q) \in \mathbb{Z}^{*2}$, la fraction p/q étant irréductible. Alors, à l'instant $\tau = \frac{q}{b}$, on a, si l'état initial est $z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$:

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(\tau) = \begin{pmatrix} x_0 + b \frac{q}{b} \\ y_0 + \frac{p}{q} b \frac{q}{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + q \\ y_0 + p \end{pmatrix}$. Comme p et q sont entiers, ce point représente le point $z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ sur le tore. Donc, $z(\tau) = z(0)$, ce qui montre que la trajectoire est périodique. On a bien un cycle, qui est une **hélice sur le tore T** . En fait, x effectue q « tours » alors que y en effectue p .

4. $b \neq 0, \frac{c}{b} \notin \mathbb{Q}$ Soit $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ un représentant d'un point quelconque de T . Appelons Orb_0 l'orbite du point $z_0 = (0, 0)$. Au temps $\tau = y_1/c$, on a $y(t) = c\tau = y_1$. On retrouve la même « ordonnée » à l'instant $\tau + 1/c$.

Mais alors, x a augmenté de $\alpha = \frac{b}{c}$, qui est irrationnel. Aux instants $\tau + m/c$ (où $m \in \mathbb{Z}$), y prend la même valeur y_1 (modulo 1), et x prend l'ensemble des valeurs $b\tau + m\alpha$. C'est le translaté par $b\tau$ de l'ensemble des $m\alpha$, dont on sait par l'exercice 8.2 qu'il est dense sur le cercle T^1 . L'ensemble des x est donc lui-même dense sur T^1 . Ceci signifie que pour tout voisinage V de (x_1, y_1) sur T , il existe m tel que $z(\tau + m/c) \in V$. Donc, Orb_0 est dense sur T . L'orbite d'un point (x_0, y_0) quelconque de T est homologue de Orb_0 dans la translation (le lecteur s'assurera aisément que cette notion a un sens sur T) de valeur (x_0, y_0) , et est elle aussi dense sur T quel que soit z_0 .

Par conséquent : **pour tout z_0 , $Orb(z_0)$ est dense sur T .**

On remarquera que, munie de la topologie induite par celle de T , l'orbite de z_0 n'est pas une variété topologique. Ceci explique les réserves exprimées au § 2.3.2 quant au fait qu'une orbite soit une variété.

Toutefois, on peut munir $Orb(z_0)$ d'une topologie différente : celle engendrée par les fragments d'orbite $\{z(t) ; t \in]a, b[\}$. Avec cette topologie, $Orb(z_0)$ est une variété différentielle de dimension 1 homéomorphe à $\mathbb{R}$.

CHAPITRE 9

Exercice 9.1 Bifurcation d'un système polynomial de dimension 1

1. Si $\mu \neq 0$, le système possède 3 équilibres : $-\mu$, 0 et μ .

Si $\mu = 0$, tout point est un équilibre. Le système linéarisé autour d'un équilibre a est $\dot{x} = \nabla f_a(x)$. Comme $\nabla f_a(x) = (3\mu a^2 - \mu^3)x$, on a les trois linéarisés :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \nabla f_{-\mu} \cdot x = 2\mu^3 x \\ \dot{x} &= \nabla f_0 \cdot x = -\mu^3 x \\ \dot{x} &= \nabla f_{\mu} \cdot x = 2\mu^3 x \end{aligned}$$

2. La question 1 renseigne sur la nature des équilibres et permet de tracer le diagramme de bifurcation suivant :

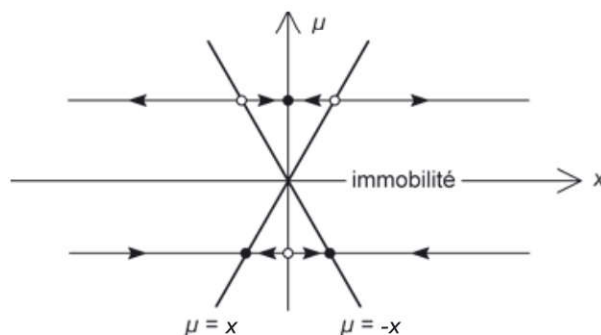


Figure 14.9

Commentaires

- Pour $\mu < 0$, l'équilibre 0 est instable, les équilibres $\pm\mu$ asymptotiquement stables.
- Pour $\mu = 0$, le système se réduit à $\dot{x} = 0$: tout réel est un équilibre stable.
- Pour $\mu > 0$, l'équilibre 0 est asymptotiquement stable, les équilibres $\pm\mu$ instables.

Par conséquent, il y a **bifurcation pour $\mu = 0$** .

À la traversée de la bifurcation, il y a changement de nature de chacun des trois équilibres : on passe de [ASt ST, INST, ASt ST] (pour $\mu < 0$) à [INST, ASt ST, INST] (pour $\mu > 0$). À la valeur précise de bifurcation ($\mu = 0$), il y a immobilité (donc équilibre simplement stable) de tous les états.

Cette bifurcation n'est d'aucun des trois types élémentaires de bifurcations de systèmes de dimension 1.

Exercice 9.2 Bifurcation d'un système non-linéaire de dimension 1

Remarque préliminaire

Comme $x \mapsto \dot{x}$ est impaire, le champ des trajectoires est lui-même impair (si $x(t)$ est une trajectoire, $\tilde{x}(t) = -x(-t)$ est aussi une trajectoire) et 0 est toujours un équilibre.

1. Les équilibres sont fournis par $\dot{x} = 0$, soit $\sin x = \mu x$. Compte tenu de la forme de la fonction sinus, cette équation :
 - a la solution unique $x = 0$ pour $\mu \geq 1$;
 - a trois solutions du type $-a(\mu)$, 0 et $a(\mu) > 0$ pour $\mu \in [2/\pi, 1[$
2. Le portrait de phases est le suivant (la courbe de bifurcation a une tangente horizontale pour $x = 0$) ; les équilibres $-a$ et a sont *instables*, 0 est *asymptotiquement stable*.

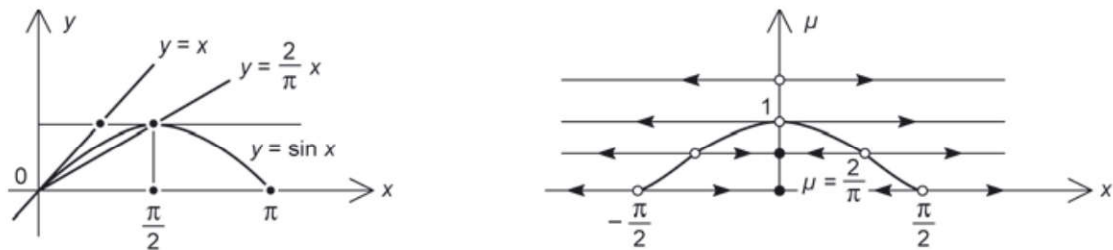


Figure 14.10

3. Le simple examen du portrait de phases montre qu'il y a une **bifurcation de type fourche** pour $\mu = 1$.
4. $\dot{F}(x) = \nabla F \cdot f = 2x(\mu x - \sin x)$, équivalent à $2x^2(\mu - 1)$ pour $\mu \neq 1$.
 - (a) pour $\mu \geq 1$, $\mu x - \sin x$ est du signe de x , donc $\dot{F} > 0$: F n'est pas une fonction de Liapounov ;
 - (b) pour $\mu \in [2/\pi, 1]$, $\mu x - \sin x$, est du signe de $-x$.
Donc $\dot{F} < 0$ hors de $x = 0$ dans un voisinage de 0 : F est une **fonction de Liapounov** pour l'équilibre 0, ce qui entraîne la **stabilité asymptotique** de 0.

Problème 9.1 Un système non-linéaire de dimension 2

1. $\dot{z} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} + \mu z(1 - r^2)$ est somme de 2 vecteurs orthogonaux de modules carrés respectifs r^2 et $\mu^2 r^2(1 - r^2)^2$. D'après le théorème de Pythagore : $\|\dot{z}\|^2 = r^2[1 + \mu^2(1 - r^2)^2]$
2. D'après l'expression précédente, $\dot{z} = 0 \iff r^2 = 0 \iff z = 0$
Donc, $z_0 = 0$ est le seul équilibre.
3. $f(z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} (1 - r^2) = \begin{pmatrix} -y + \mu(x - x^3 - xy^2) \\ x + \mu(y - x^2y - y^3) \end{pmatrix}$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}, \text{ c'est-à-dire } \nabla f = \begin{pmatrix} \mu(1 - 3x^2 - y^2) & -1 - 2\mu xy \\ 1 - 2\mu xy & \mu(1 - x^2 - 3y^2) \end{pmatrix}$$
4. (a) $\nabla f(z_0) = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de ∇f sont obtenues par :

$$\begin{vmatrix} \mu - \lambda & -1 \\ 1 & \mu - \lambda \end{vmatrix} = (\mu - \lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda\mu + 1 + \mu^2 = 0.$$

Ce sont donc $\lambda = \mu \pm i$. Elles sont toujours complexes conjuguées, de partie réelle μ . Si l'équilibre est hyperbolique, sa nature est fournie directement par le **théorème de Hartman-Grobman** : z_0 est asymptotiquement stable si

$\mu < 0$, instable si $\mu > 0$.

Si $\mu = 0$, le système devient $\dot{z} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$: les trajectoires sont des cercles décrits uniformément dans le sens direct, ce qui atteste la stabilité simple de l'équilibre. Résumons :

- pour $\mu < 0$, l'équilibre z_0 est *asymptotiquement stable*
- pour $\mu = 0$, l'équilibre z_0 est *stable* (mais non asymptotiquement)
- pour $\mu > 0$, l'équilibre z_0 est *instable*

(b) Ce qui précède montre qu'il y a changement de nature de l'équilibre pour $\mu = 0$.

Le système présente donc une *bifurcation pour $\mu = 0$* .

5.

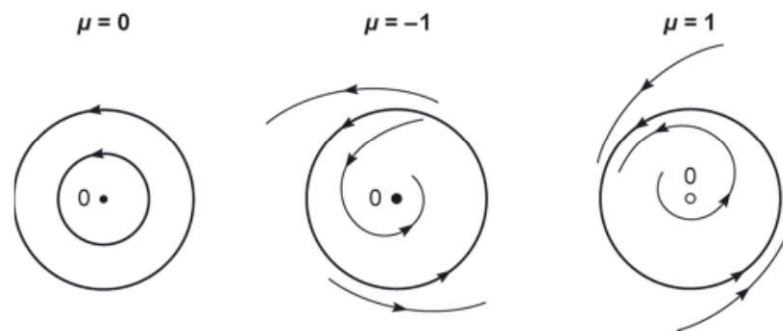


Figure 14.11

$$6. f(z) = \underbrace{\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}}_{\text{composante tangentielle}} + \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(1 - r^2)}_{\text{composante radiale}}$$

Pour $r < 1$: composante radiale > 0 : évolution centrifuge de z

Pour $r > 1$: composante radiale < 0 : évolution centripète de z

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{dr^2}{dt} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{d(x^2 + y^2)}{dt} = x\dot{x} + y\dot{y} \\ &= x[-y + x(1 - r^2)] + y[x + y(1 - r^2)] \\ &= -xy + (x^2 + y^2)(1 - r^2) + yx = r^2(1 - r^2) \end{aligned}$$

soit $\frac{dR}{dt} = 2R(1 - R)$, (avec $R = r^2$), équation différentielle qui montre que R (donc r) tend vers 1 quand $t \rightarrow \infty$ (ce que confirme la résolution analytique, non exigée, de l'équation différentielle). Le cercle unité attire le disque unité pointé $0 < \rho < 1$. Par conséquent :

Le cycle-limite est le *cercle unité décrit uniformément dans le sens direct*.

CHAPITRE 10

Exercice 10.1 Deux trajectoires sécantes

Soit le système $x_{k+1} = 0 \cdot x_k$.

Pour $x_0 = 0$ et $x_0 = 1$, on a la même valeur de x_1 : $x_1 = 0$. Il n'y a donc pas unicité de la trajectoire pour laquelle $x_1 = 0$. En d'autres termes, les trajectoires d'états initiaux 0 et 1 sont sécantes aux temps $k \geq 1$. De plus, le système est clairement *linéaire*, ce qui fournit l'exemple demandé.

Exercice 10.2 Équilibres et 3-cycle

1. $f(x)$ vaut $f_1(x)$ pour $x \leq 3/4$, et $f_2(x)$ pour $x \geq 3/4$. Un équilibre x satisfait nécessairement :

- $f_1(x) = x$, d'où $x = -1$, que l'on retient car $-1 < 3/4$
- ou $f_2(x) = x$, d'où $x = 4/3$, que l'on retient aussi car $4/3 > 3/4$.

Donc, S_D possède deux équilibres, -1 et $4/3$.

2. Pour tout $x \in I$, $x \leq 3/4$ d'où $f(x) = f_1(x) = 2x + 1$. Alors, $f_1(x) \in [3/4, 13/8]$. Comme $f(x) \geq 3/4$, on a $f^2(x) = (f_2 \circ f_1)(x) = -4x + 2$, d'où $f^2(x) \in [3/4, 5/2]$. Comme $f^2(x) \geq 3/4$, on a $f^3(x) = (f_2 \circ f_2 \circ f_1)(x) = -2(-4x + 2) + 4 = -8x$. On a donc bien $x \in I \implies f^3(x) = -8x$.

3. $0 \in I \implies f^3(0) = -8 \times 0 = 0$, ce qui montre que 0 est un équilibre de Σ .

0 est donc aussi l'un des éléments d'un 3-cycle de S_D .

Ce dernier s'obtient par $f(0) = f_1(0) = 1$ et $(f \circ f)(0) = f(1) = f_2(1) = 2$.

On vérifie que $f(2) = f_2(2) = 0$

Donc, $(0, 1, 2)$ est un 3-cycle de S_D .

4. Pour $x \in I$, $f^3(x) = -8x$, d'où $(f^3)'(0) = -8$.

Ce nombre étant de module supérieur à 1, le cycle $(0, 1, 2)$ est instable et répulsif.

CHAPITRE 11

Exercice 11.1 Rencontre orbite - section transverse

Si l'orbite coupe L une infinité de fois entre t_1 et t_2 , l'ensemble T des temps correspondants admet un point d'accumulation t^* , limite d'une suite t_i ($i \in \mathbb{N}^*$) d'éléments de T distincts de t^* .

Par continuité, $z(t^*) \in L$. Alors, $f[z(t^*)] = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z(t_k) - z(t^*)}{t_k - t^*}$: cette limite ne peut être qu'un vecteur vertical ou nul, ce qu'interdit le statut de section transverse de L .

L'hypothèse de départ étant donc à rejeter : *l'orbite de z^* coupe L un nombre fini de fois.*

Remarques

1. Le raisonnement est encore valide si la section transverse est définie dans un sens plus général : on impose seulement que L et $f(z_0)$ ne soient pas colinéaires, ce qui traduit le fait que la question est une question de géométrie affine et non euclidienne.
2. La conclusion se généralise au cas où $z \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 11.2 Ensembles stables, ensembles-limites, attraction

Le schéma suivant donne les huit exemples cherchés : sept sont de dimension 1, un de dimension 2.

Le tableau s'interprète ainsi : la 1^{re} colonne sert à définir A , les colonnes suivantes décrivent ses qualités :

Colonne « stable » : une croix si A est stable. Colonne « limite » : une croix si A est l'ensemble-limite d'un point. Colonne « attract. » : une croix si A attire un ensemble de mesure positive.

Dans la définition de A , il est fait référence aux systèmes suivants :

S_1 est le système d'équation d'évolution $\dot{x} = x(x - 1)$, avec $x \in \mathbb{R}$

S_2 est le système d'équation d'évolution $\dot{x} = 0$, avec $x \in \mathbb{R}$

S_3 est le système plan ($x \in \mathbb{R}^2$) dont les orbites sont les cercles de centre 0, décrits dans le sens positif à la vitesse $\|x\| \cdot \|x - 1\|$. Le cercle unité Γ se décompose en deux orbites : $\Gamma - \{1\}$ et l'équilibre $\{1\}$.

S_4 est le système d'équation d'évolution $\dot{x} = x^2$, avec $x \in \mathbb{R}$

	stable	limite	attract.
$A = \{0\}$ pour S_1	X	X	X
$A = \{0\}$ pour S_2	X	X	
$A = \mathbb{R}_-$ pour S_1	X		X
$A = \Gamma$ pour S_3	X		
$A = \{0\}$ pour S_4		X	X
$A = \{1\}$ pour S_1		X	
$A = [-\infty, 2]$ pour S_1			X
$A = [2, 3]$ pour S_1			

L'ensemble $A = \{0\}$ pour S_1 possède les trois propriétés ; c'est par définition un **attracteur**. Il est le seul dans ce cas parmi les huit exemples proposés.

Exercice 11.3 Une fractale dans $\mathbb{R}$

La démonstration est de même nature que celle faite pour l'ensemble de Cantor en annexe 6.

1. On identifie K comme intersection d'une suite décroissante de compacts K_i .
Donc, **K est compact.**
2. Si on prend $m = 10^k$, on a avec les notations de l'annexe 6 : $N(m) = 9^k$
d'où $\ln N / \ln m = (k \ln 9) / (k \ln 10)$, d'où $\dim K = \ln 9 / \ln 10 \simeq 0,954$.

CHAPITRE 12

Exercice 12.1 Un équilibre attractif pour $r = 3$

1. On a $\frac{f(a + \varepsilon) - a}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \left[3 \left(\frac{2}{3} + \varepsilon \right) \left(1 - \frac{2}{3} - \varepsilon \right) - \frac{2}{3} \right] = -(1 + 3\varepsilon)$.

On observe que l'image d'un point situé au voisinage droit ($\varepsilon > 0$) de a saute au voisinage gauche de a , et ***s'en éloigne*** ($|-(1 + 3\varepsilon)| > 1$).

En revanche, l'image d'un point situé au voisinage gauche ($\varepsilon < 0$) de a saute au voisinage droit de a , et ***s'en rapproche*** ($|-(1 + 3\varepsilon)| < 1$).

Ne sachant pas à ce stade si l'un des deux phénomènes l'emportera sur l'autre, on ne peut pas encore conclure sur le caractère de stabilité de a .

2. On a $f^2(a + \varepsilon) = f[f(a + \varepsilon)] = f[\frac{2}{3} - (1 + 3\varepsilon)\varepsilon]$, qui est un polynôme de degré 4 en ε : $f^2(a + \varepsilon) = \frac{2}{3} + \varepsilon - 18\varepsilon^3 - 27\varepsilon^4$.

D'où $\frac{f^2(a + \varepsilon) - a}{\varepsilon} = 1 - 18\varepsilon^2 - 27\varepsilon^3$. Pour ε appartenant à un voisinage de 0, cette expression est strictement inférieure à 1. Les diverses itérations de f^2 se rapprochent donc de l'équilibre $a = \frac{2}{3}$ de façon unilatérale. Ceci montre que **$a = \frac{2}{3}$ est stable.**

Ce phénomène, joint au fait que l'équilibre a est isolé, montre que a est **attractif** (puits). Si a n'était pas un équilibre isolé pour f^2 , on limiterait la conclusion à sa stabilité simple.

Problème 12.1 La suite logistique pour $r = 4$

1. $f(\sin^2 \theta) = 4 \sin^2 \theta (1 - \sin^2 \theta) = 4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta = \sin^2(2\theta)$.
Donc, $f^2(\sin^2 \theta) = f(f(\sin^2 \theta)) = f(\sin^2(2\theta)) = \sin^2(4\theta)$.
Plus généralement, par une récurrence évidente : $\forall n \in \mathbb{N}, f^n(\sin^2 \theta) = \sin^2(2^n \theta)$

2. pour $x \in \Omega_T$, $(f \circ \psi)(x) = f[\sin^2(\pi \frac{x}{2})] = \sin^2(\pi x)$ d'après la question 1.
 pour $x \in [0, 1/2] \subset \Omega_T$, $(\psi \circ t)(x) = \psi(2x) = \sin^2(\pi x)$
 pour $x \in [1/2, 1] \subset \Omega_T$, $(\psi \circ t)(x) = \psi(2 - 2x) = \sin^2(\pi - \pi x) = \sin^2(\pi x)$
 En résumé : sur $\Omega_T = I$, on a $f \circ \psi = \psi \circ t$. On a une égalité analogue avec f^k et t^k (où $k \in \mathbb{N}$), donc avec les flots. Comme ψ est un homéomorphisme entre I et lui-même, nous avons montré que :

Sur I , les systèmes T et L sont conjugués par ψ .

3. Soit $0, a_1 a_2 a_3 \dots$ l'écriture binaire d'un réel α de I , et $\varepsilon > 0$ quelconque. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $2^{-k} < \varepsilon$, ce qui assure $|\alpha - 0, a_1 a_2 \dots a_k| < \varepsilon$. Comme toute suite de k nombres égaux à 0 ou 1 est présente dans l'écriture binaire de m , il existe j tel que $m = 0, m_1 m_2 \dots m_j a_1 a_2 \dots a_k m_l m_{l+1} \dots$, où $l = j + k + 1$. Alors, l'écriture binaire de $2^j m$ est $2^j m = m_1 m_2 \dots m_j, a_1 a_2 \dots a_k m_l m_{l+1} \dots$, dont la partie fractionnaire vaut $0, a_1 a_2 \dots a_k m_l m_{l+1} \dots$. Les écritures de α et de $2^j m$ ayant leurs k premiers éléments après la virgule égaux, les parties fractionnaires de ces deux nombres diffèrent de moins de 2^{-k} , donc de moins de ε . Nous venons de montrer que **l'ensemble des parties fractionnaires des nombres $2^n m$ est dense sur I lorsque n décrit $\mathbb{N}$.**

4. Soit $a = \sin^2(m\pi)$, où m est le nombre de Champernowne (question précédente).

$f^n(a) = f^n(\sin^2(m\pi)) = \sin^2[2^n m\pi]$. Il résulte de la question 3 que l'ensemble des parties fractionnaires des nombres $2^n m\pi$ est lui-même dense sur I lorsque n décrit $\mathbb{N}$. Il en est de même des nombres $\sin^2[2^n m\pi]$ car la fonction $y \in \mathbb{R} \mapsto \sin^2 y$ est continue. Par conséquent, l'ensemble des $f^n(a)$ est dense dans I lorsque n décrit $\mathbb{N}$.

Exprimé autrement : **l'orbite de a (pour le système L) est dense dans I .**

Le raisonnement tenu pour a est également valable pour tout point $f^n(a)$ de son orbite. Et comme l'orbite de a est dense dans I , on peut énoncer :

L'ensemble des points dont l'orbite est dense dans I est lui-même dense dans I .

5. x_0 est périodique si et seulement si il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x_n = f^n(x_0) = x_0$. Or, $x_0 = \sin^2 \theta$ (avec $\theta \in [0, \pi/2]$) et $x_n = \sin^2(2^n \theta)$. D'où $\sin^2 \theta = \sin^2(2^n \theta)$, qui équivaut à $2^n \theta = \pm \theta + k\pi$.

On a donc $\theta = \frac{k\pi}{2^n \pm 1}$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Limiter k à $\{0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1\}$ suffit à couvrir toutes les valeurs de $\sin^2 \theta$, donc de x . L'ensemble des valeurs de θ obtenues lorsque n décrit $\mathbb{N}^*$ est dense dans $[0, \pi/2]$. Comme l'application $\theta \mapsto x = \sin^2 \theta$ est continue, l'ensemble des x_n périodiques (avec 2^{n-1} valeurs possibles de x_n à n donné) lorsque n décrit $\mathbb{N}^*$ est dense dans I . On retiendra que :

L'ensemble des points périodiques est dense dans I .

CHAPITRE 13

Exercice 13.1 Un atlas du cercle

a) Chacun des U_i , homéomorphe à un intervalle ouvert réel, peut être appelé intervalle ouvert de T^1 (dénomination qu'on utilisera aussi dans le corrigé de l'exercice 13.2). Par construction, l'atlas recouvre T^1 : on a $U_1 \cup U_2 = T^1$.

b) Désignons un élément x de T^1 par son représentant réel de $[0, 1[$.

Soit $\varphi_1(x \in U_1) = x \in \mathbb{R}$, et $\varphi_2(x \in U_2) = x \in \mathbb{R}$ si $x \in]0, \frac{1}{2}[$, sinon $\varphi_2(x) = x - 1 \in \mathbb{R}$; φ_1 et φ_2 sont des homéomorphismes : pour illustrer la continuité de φ_2 en 0, on pourra vérifier par exemple que pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement faible, $\varphi_2(\varepsilon)$ et $\varphi_2(1 - \varepsilon)$ diffèrent de 2ε .

$U_1 \cap U_2$ a deux composantes connexes : $]0, \frac{1}{2}[$, et $]\frac{1}{2}, 1[$. Pour tout x appartenant à la première, $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$, donc $(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})$ et $(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})$ sont l'identité de $]0, \frac{1}{2}[$. Pour tout x appartenant à la seconde, $(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})$ et $(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})$ sont des translations. Dans tous les cas, $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ est de classe C^∞ .

Par conséquent, T^1 est une variété différentielle de dimension 1 et de classe C^∞ .

Exercice 13.2 Un atlas du tore

L'approche est de même nature que pour l'exercice 13.1.

a) U_1 et U_2 sont chacun le produit d'un intervalle ouvert de T^1 (comme défini en début de corrigé de l'exercice 13.1) et d'un cercle, donc chacun homéomorphe à une couronne plane ouverte, qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Tout élément de T^2 appartient à U_1 ou U_2 , par définition même de ces ensembles. Donc, $U_1 \cup U_2 = T^2$.

b) $U_1 \cap U_2$ a deux composantes connexes : $]0, \frac{1}{2}[\times T^1$ et $]\frac{1}{2}, 1[\times T^1$. Chacune des deux est homéomorphe à une couronne ouverte du plan, qui peut être le plan privé du point $(0, 0)$. Il existe une infinité de couples d'applications φ_i de U_i dans $\mathbb{R}^2$ ($i \in \{1; 2\}$) telles que $f_1 \circ f_2^{-1}$ et $f_2 \circ f_1^{-1}$ soient de classe C^∞ .

Une piste naturelle : pour chaque composante connexe, qui est topologiquement le produit d'un intervalle par un cercle, utiliser l'intervalle pour paramétrer le module dans $\mathbb{R}^2$, et le cercle pour paramétrer l'argument.

Par conséquent, T^2 est une variété différentielle de dimension 2 et de classe C^∞ .

Exercice 13.3 Dimension fractale du segment rationnel

1. Comme $\mathbb{Q}_0$ est infini dénombrable, sa mesure de Lebesgue est nulle :

$$m(\mathbb{Q}_0) = 0$$

Comme $\mathbb{Q}_0$ est partout dense dans le segment réel $[0, 1]$, sa dimension fractale est celle de $[0, 1]$, c'est-à-dire 1 : $\delta(\mathbb{Q}_0) = 1$

2. L'ensemble triadique K de Cantor et $\mathbb{Q}_0$ sont deux sous-ensembles du même ensemble $[0, 1]$.

– K est de dimension fractale $\ln 2 / \ln 3$; il est infini non-dénombrable ;

– $\mathbb{Q}_0$ est de dimension fractale 1 ; il est infini dénombrable.

L'ensemble $\mathbb{Q}_0$ a le plus faible cardinal mais la plus grande dimension fractale. Ceci montre qu'il n'y a **aucun lien direct** entre cardinal et dimension fractale. Il n'y a même pas de croissance au sens large de la dimension fractale en fonction du cardinal.

Problème 13.1 Dimensions de trois fractales classiques

1. **Triangle de Sierpinski** : si on divise le triangle circonscrit à T (de côté posé égal à 1) en triangles équilatéraux égaux de côté $1/m$, le recouvrement de T exige $N(m)$ d'entre eux.

– pour $m = 2 = 2^1$, on a $N(m) = 3 = 3^1$

– pour $m = 4 = 2^2$, on a $N(m) = 9 = 3^2$

plus généralement :

– pour $m = 2^k$, on a $N(m) = 3^k$

$$\frac{\ln N(m)}{\ln m} = \frac{k \ln 3}{k \ln 2} = \frac{\ln 3}{\ln 2}, \text{ ceci pour tout } k.$$

Donc, la dimension fractale de T est $\delta(T) = \ln 3 / \ln 2 \simeq 1,585$.

2. **Tapis de Sierpinski** : si on divise le carré circonscrit à U (de côté posé égal à 1) en carrés égaux de côté $1/m$, le recouvrement de U exige $N(m)$ d'entre eux.

– pour $m = 3 = 3^1$, on a $N(m) = 8 = 8^1$

– pour $m = 9 = 3^2$, on a $N(m) = 64 = 8^2$

plus généralement :

– pour $m = 3^k$, on a $N(m) = 8^k$

$$\frac{\ln N(m)}{\ln m} = \frac{k \ln 8}{k \ln 3} = \frac{3 \ln 2}{\ln 3}, \text{ ceci pour tout } k.$$

Donc, la dimension fractale de U est $\delta(T) = 3 \ln 2 / \ln 3 \simeq 1,893$.

3. **Flocon de von Koch** : si on divise l'un des triangles équilatéraux **circonsrits** à F (de côté posé égal à 1) en triangles équilatéraux de côté $1/m$, le recouvrement de F exige $N(m)$ d'entre eux. La valeur $1/2$ du côté du triangle équilatéral initial explique le facteur 2 dans les valeurs de m choisies.

– pour $m = 2 = 2.3^0$, on a $N(m) = 3 = 3.4^0$

– pour $m = 6 = 2.3^1$, on a $N(m) = 12 = 3.4^1$

– pour $m = 18 = 2.3^2$, on a $N(m) = 48 = 3.4^2$

plus généralement :

– pour $m = 2.3^k$, on a $N(m) = 3.4^k$

$$\frac{\ln N(m)}{\ln m} = \frac{\ln 3 + k \ln 4}{\ln 2 + k \ln 3} \text{ tend quand } m \rightarrow \infty \text{ vers } \frac{2 \ln 2}{\ln 3}.$$

Donc, la dimension fractale de F est $\delta(T) = 2 \ln 2 / \ln 3 \simeq 1,262$.

Les valeurs obtenues pour les trois dimensions fractales sont en fait des conjectures car nous nous sommes restreints à certaines valeurs remarquables de m . Leur validation rigoureuse exigerait des calculs plus lourds.

BIBLIOGRAPHIE

Plus que centenaire, l'ouvrage [15] d'Henri Poincaré a établi les fondements pérennes de la théorie des systèmes dynamiques. Son intérêt est aussi bien historique que scientifique.

Les bases de la théorie des équations différentielles, qui régissent l'évolution des systèmes dynamiques à temps continu, sont exposées dans les livres en références [2], [11], [18], [19], ainsi que dans une abondante bibliographie non reproduite ici.

Lorsqu'un espace d'états est une variété distincte d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$, le cadre formel devient celui du calcul différentiel sur les variétés. On en trouvera des éléments dans les ouvrages [5], [8], [14], [18], [19].

Le chaos, aspect complexe et encore incomplètement exploré de la théorie des systèmes dynamiques, est abordé dans les livres en références [1], [4], [9], [10], [12], [13], [15], [17], [18].

On trouvera une ouverture de la théorie des systèmes dynamiques vers divers domaines dans [1], [4], [12], [13], [17] (physique, mécanique, chimie, biologie), ainsi que dans [3], [7], [10] (hydrodynamique, météorologie), [6], [15] (mécanique céleste), et [16] (commande des systèmes).

- [1] ALLIGOOD Kathleen T., SAUER Tim D., YORKE James A., *Chaos, an introduction to dynamical systems*, Springer, USA, 1996.
- [2] ALVAREZ Aurélien, *Systèmes dynamiques avec Poincaré*, Le Pommier, Paris, 2013.
- [3] CHARRU François, *Instabilités hydrodynamiques*, CNRS Editions Paris, EDP Sciences, Paris, 2000.
- [4] DANG-VU Huyên et DELCARTE Claudine, *Bifurcations et chaos*, Ellipses, Paris, 2000.
- [5] DEMAZURE Michel, *Catastrophes et bifurcations*, Ellipses, Paris, 1989.
- [6] DVORAK Rudolf et LHOTKA Christof, *Celestial dynamics : chaoticity and dynamics of celestial systems*, Wiley, New York, 2013.
- [7] GHYS Etienne, *L'attracteur de Lorenz, paradigme du chaos*, séminaire Poincaré 2010 – édition en langue anglaise : Springer, 2013.
- [8] LAFONTAINE Jacques, *Introduction aux variétés différentielles*, EDP Sciences, collection Grenoble Science, 2010.
- [9] LUO Albert C.J., *Analytical routes to chaos in nonlinear systems*, Wiley, New York, 2014.
- [10] MANNEVILLE Paul, *Système dynamiques et chaos*, cours de DEA, LadHyX, École Polytechnique, Palaiseau, 1998.
- [11] MARLE Jean-Michel, *Systèmes dynamiques, une introduction*, Ellipses, Paris, 2003.
- [12] MISBAH Chaouqi, PRIGOGINE Ilya, *Dynamiques complexes et morphogénèse : introduction aux sciences non-linéaires*, Springer Verlag, France, 2011.
- [13] NICOLIS Grégoire, PRIGOGINE Ilya, *À la rencontre du complexe*, collection Philosophie d'aujourd'hui, PUF, 1992.
- [14] PHAM Frédéric, *Géométrie et calcul différentiel sur les variétés*, Dunod, Paris, 1999.

- [15] POINCARÉ Henri, *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Gauthier-Villars, Paris, 1899.
- [16] ROUCHON Pierre, BONNANS Frédéric, *Commande et optimisation de systèmes dynamiques*, Editions de l'Ecole Polytechnique, Paris, 2006.
- [17] RUELLE David, *Hasard et chaos*, Odile Jacob, Paris, 1991.
- [18] WIGGINS S., *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, 2^e éd., vol. 2, Springer, New York, 2003.
- [19] ZISMAN Michel, CHAPERON Marc, *Calcul différentiel et intégral*, (ouvrage dirigé par les personnes citées) Dunod, collection Sciences Sup, Paris, 2008.

INDEX

A

adhérence 113
amortissement 83
application
 de premier retour, 141
 lipschitzienne, 207
 localement lipschitzienne, 207
 logistique, 179
arbre de Feigenbaum 191
ascendant 15, 18
asymptotiquement stable
 (équilibre), 34
 (orbite), 106
atlas 203
attirer 40, 105
attracteur 172, 219
 de Hénon, 220
 de Lorenz, 176, 178
 étrange, 174
attractif
 (cycle), 154, 155
 (ensemble), 40
 (équilibre), 34, 144
 (nœud), 66
attractive (orbite) 105
autonome (système) 1

B

Bach (Jean-Sébastien) 175
bassin
 d'attraction, 40, 105, 157
 de répulsion, 106, 157
Bendixson
 (critère de), 71, 72
bicontinuité 199
bifurcation 73, 129, 130, 157, 258, 259
 (diagramme de), 134
 de Hopf, 137
 fourche, 136
 globale, 129
 locale, 129–131

 nœud-col, 135
 pour la suite logistique, 189
 transcritique, 135
bloc de Jordan 147, 213
boule 201

C

Cantor 175
Cantor (ensemble triadique de) 194, 221
capacité (dimension de) 219
carte (d'un atlas) 203
Cauchy-Lipschitz (théorème de) 7, 158, 207
Cauchy-Schwarz (inégalité de) 203
cellules de Rayleigh-Bénard 177
central (sous-espace) 45, 145
centrale (variété) 108
centre 11, 66
champ
 hamiltonien, 12
 hélicoïdal, 26
Champernowne (nombre de) 265
champs
 conjugués, 22
chaos 170
 en temps continu, 159
 en temps discret, 191, 193
chaotique
 (trajectoire en temps continu), 171
 (trajectoire en temps discret), 193
 (trajectoire), 171, 172, 193
col 66
complet (espace) 203
composante connexe 3, 104, 252
confusion d'orbites 74, 75
conjugaison 39
conjugués
 (champs), 22
 (moments), 79
 (systèmes), 22, 237
connexe (composante) 3, 104, 252
connexe (simplement) 71

Systèmes dynamiques

connexité 100
conservatif (système) 12, 32, 80, 82
constante de Feigenbaum
 (première), 191
 (deuxième), 191
continuité 199
convective (dérivée) 85
coordonnées généralisées 79
Copernic (Nicolas) 197
courbure 69
Crank Nicholson (schéma de) 225
critère de Bendixson 71, 72
critique (point) 33, 144
cycle 104, 166
 (multiplicateur d'un), 154
 attractif, 154, 155
 instable, 155
 répulsif, 154, 155
 stable, 155
 super-attractif, 186
cycle-limite 99, 106
 α -limite, 106
 ω -limite, 106

D

d'Holbach (Paul-Henri, baron) 208
décomposition spectrale 211
delta-losange 160
dérivation sur une variété 206
dérivée
 convective, 85
 de Lie, 84, 85
 eulérienne, 85
 locale, 85
 particulière, 84
 temporelle, 85
descendant 15, 18
destin
 du premier type, 168
 du deuxième type, 168
 du troisième type, 168
 du quatrième type, 170
 du cinquième type, 172
déterminisme 7, 207

déterminisme laplacien 208
diagramme de bifurcation 134
 (suite logistique), 189
diagramme itératif 151
difféomorphisme 25
différences finies 225
dimension
 de capacité, 219
 de Kolmogorov, 219
 fractale, 175, 219, 266, 267
dissipatif (système) 32, 83
distance 201
distance associée 202
divergence (théorème de la) 32
domaine 2, 113
Duffing (oscillateur de) 81
dynamique (système) 1

E

Einstein (Albert) 198
elliptique (point) 11, 66
encadrement (lemme d') 215
endomorphisme
 (indice d'un), 51, 53
 (réduction d'un), 43, 210
 hyperbolique, 51, 53, 56
 semi-simple, 43, 211
ensemble
 attractif, 40
 fractal, 219
 invariant par le flot, 31
 stable, 40
 triadique, 220
 triadique de Cantor, 194, 221
ensemble-limite 98, 250
 α -limite, 99
 ω -limite, 98
équation
 logistique, 6, 228
équations canoniques 80
équilibre 10, 30, 33, 144
 asymptotiquement stable, 34
 attractif, 34, 144
 hyperbolique, 91

indifférent, 35, 151
 instable, 34, 144
 répulsif, 34, 144
 simplement stable, 35
 stable, 34, 144
 super-attractif, 150
 superstable, 150, 182
 ω -stable, 35
 équivalence orbitale 73
 équivalentes (normes) 201
 ergodicité 189
 escalier (schéma) 151
 escalier du diable 194
 escargot (schéma) 151
 espace
 complet, 203
 de Hilbert, 203
 des états, 2
 des phases, 2
 euclidien, 202
 hermitien, 202
 métrique, 200
 préhilbertien, 202
 tangent (à une variété), 206
 topologique, 199
 vectoriel normé, 201
 état 1, 142
 étrange (attracteur) 174
 euclidien (espace) 202
 Eudoxe 197
 Euler 198
 Euler (schéma d') 225
 eulérienne (dérivée) 85
 explosive
 (mort), 8, 9, 158
 (naissance), 8
 exponentielle de matrice 234
 exposant de Liapounov 155–157, 172

F

Feigenbaum
 (1^{re} constante de), 191
 (2^e constante de), 191
 (arbre de), 191

Feigenbaum (Mitchell) 191
 flocon de von Koch 220, 267
 flot 17, 143
 hamiltonien, 81
 fluide hamiltonien 81
 fonction de Liapounov 83, 85
 forme
 hermitienne, 202
 sesquilineaire, 202
 fourche (bifurcation) 136
 foyer 66
 fractal (ensemble) 219
 fractale 219, 264
 (dimension), 175, 219, 266, 267

G

générateur (point) 58, 60, 61
 génératrice
 (orbite), 61
 (trajectoire), 58, 60, 61
 globale (bifurcation) 129
 Green (théorème de) 71
 Gronwall (inégalité de) 19

H

hamiltonien 80
 (champ), 12
 (flots), 81
 (fluide), 81
 (système), 79, 82, 245
 harmonique (oscillateur) 11
 Hartman-Grobman (théorème de) 93
 hélicoïdal (champ) 26
 Hénon (attracteur de) 220
 hermitien (espace) 202
 hermitienne (forme) 202
 hétérocline
 (orbite), 112
 (point), 112
 (trajectoire), 112
 Hilbert (espace de) 203
 Hipparque 197
 homéomorphisme 199
 homocline

Systèmes dynamiques

(orbite), 112
(point), 112
(trajectoire), 112
Hopf (bifurcation de) 137
hyperbolique
 (endomorphisme), 51, 53, 56
 (équilibre), 91
I
implosive
 (mort), 8
 (naissance), 8, 100
impropre (nœud) 66
indice (d'un endomorphisme) 51, 53
indifférent (équilibre) 35, 151
inégalité
 de Cauchy-Schwarz, 203
 de Gronwall, 19
instable
 (cycle), 155
 (équilibre), 34, 144
 (orbite), 105
 (sous-espace), 45, 145
 (variété), 108
invariant (positivement) 31
invariant par le flot (ensemble) 31
isocline 93, 253
itératif (diagramme) 151

J

Jordan
 (bloc de), 147, 213
 (forme réduite de), 43, 213

K

KAM (théorème) 171
Képler 197
Kolmogorov 171
Kolmogorov (dimension de) 219

L

Lagrange 198

lagrangien 79
Laplace (Pierre-Simon de) 198, 208
laplacien (déterminisme) 208
Laskar (Jacques) 198
Leibniz (relation de) 206

lemme
 d'encadrement, 215
 de monotonie, 162
 du piège, 162

Liapounov
 (exposant de), 155–157, 172
 (fonction de), 83, 85
 (nombre de), 155, 156, 172
 (stable au sens de), 40
 (théorie de), 83
 (1^{er} théorème de), 86
 (2^e théorème de), 91

Lie (dérivée de) 84, 85
linéaire (système) 20, 24
linéarisation 88, 90
linéarisé (système) 89

Liouville
 (théorème de), 82
Lipschitz (condition de) 232
lipschitzienne (application) 207

locale
 (bifurcation), 129, 130
 (dérivée), 85

logistique
 (application), 179
 (équation), 6, 228
 (suite), 179

Lorenz
 (attracteur de), 176, 178
Lorenz (Edward) 198
Lotka-Volterra (système de) 176

M

m -cycle 152
 m -cycle
 (stabilité), 152
 m -périodique 152
malthusienne (croissance) 6
Mandelbrot (Benoît) 219

matrice
 (exponentielle de), 234
 nilpotente, 211
 nilpotente d'ordre p , 212
 matrices
 semblables, 24, 210
 méthode
 de Runge-Kutta, 226
 métrique 201
 métrique (espace) 200
 miroir (système) 16, 35, 100, 138
 moments conjugués 79
 monotonie (lemme de) 162
 mort
 explosive, 8, 9, 158
 implosive, 8
 multiplicateur d'un cycle 154

N

nœud 66
 attractif, 66
 impropre, 66
 répulsif, 66
 nœud-col (bifurcation) 135
 naissance
 explosive, 8
 implosive, 8, 100
 Newton (Isaac) 198
 nilpotente (matrice) 211
 nilpotente d'ordre p 212
 nombre de Champernowne 265
 nombre de Liapounov 155, 156, 172
 norme 201
 normé (espace vectoriel) 201
 norme associée 202
 normes équivalentes 201
 numérique (schéma) 225

O

orbitale
 (équivalence), 73
 (symétrie), 15
 orbite 5, 143
 (segment d'), 20

asymptotiquement stable, 106
 attractive, 105
 génératrice, 61
 hétérocline, 112
 homocline, 112
 instable, 105
 périodique, 20, 104
 répulsive, 106
 stable, 104
 orbites
 (confusion d'), 74, 75
 (répulsion d'), 77
 oscillateur de Duffing 81
 oscillateur harmonique 11
 ouvert 199

P

paramétrage (changement de) 26
 particulière (dérivée) 84
 période 104
 primitive, 104
 périodique
 (orbite), 20, 104
 (trajectoire), 20, 104
 permanent (régime) 189
 permanente (phase) 189
 phase
 permanente, 189
 transitoire, 189
 phases (espace des) 2
 phases (portrait de) 5, 66, 228
 Picard-Lindelöf (théorème de) 207
 piège (lemme du) 162
 plage temporelle 7, 112
 Poincaré (Henri) 198
 Poincaré (section de) 220
 Poincaré-Bendixson (théorème de) 159, 168
 point
 critique, 33, 144
 d'équilibre, 33, 144
 elliptique, 11, 66
 fixe, 33, 144
 générateur, 58, 60, 61

Systèmes dynamiques

hétérocline, 112
homocline, 112
régulier, 30, 33, 144, 163, 165
stationnaire, 33, 144
point-selle 66
Poisson 198
portrait de phases 5, 66, 228
positivement invariant 31
préhilbertien (espace) 202
premier retour (application de) 141
primitive (période) 104
produit scalaire 202
Ptolémée 197
puits 66, 144

R

Rayleigh-Bénard (cellules de) 177
redressement (théorème du) 30
réduction des endomorphismes 43, 210
réduite de Jordan 213
régime
 permanent, 189
 transitoire, 189
régulier (point) 30, 33, 144, 163, 165
relation de Leibniz 206
répulsif
 (cycle), 154, 155
 (équilibre), 34, 144
 (nœud), 66
répulsion d'orbites 77
répulsive (orbite) 106
résonance 94
résonance d'ordre k 94
Runge-Kutta (méthode de) 226

S

Sarkovski (théorème de) 190
scalaire (produit) 202
schéma
 d'Euler, 225
 de Crank Nicholson, 225
 numérique, 225
section de Poincaré 220
section transverse 165, 262

segment d'orbite 20
semblables
 (matrices), 24, 210
 (systèmes), 24
semi-simple 144
semi-simple (endomorphisme) 43, 211
sensibilité aux C.I. 172
sesquilinéaire (forme) 202
Sierpinski
 (tapis de), 220, 267
 (triangle de), 220, 267
simplement connexe 71
simplement stable 35
solution maximale 7
source 66, 144
sous-espace
 central, 45, 145
 instable, 45, 145
 stable, 45, 145
sphère chevelue
 (théorème de la), 117
spirale (schéma) 151
spirale logarithmique 46
stabilité 40
 (théorème général de), 50
 structurelle, 52, 130
 structurelle (théorème de), 133
 structurelle locale, 131
stable
 (asymptotiquement), 34
 (cycle), 155
 (ensemble), 40
 (équilibre), 34, 144
 (m -cycle), 152
 (orbite), 104
 (simplement), 35
 (sous-espace), 45, 145
 (variété), 108
 au sens de Liapounov, 40
stationnaire (point) 33, 144
Sternberg (théorème de linéarisation de) 95
suite logistique 179
super-attractif (cycle) 186
super-attractif (équilibre) 150

superstable
 (équilibre), 182
 superstable (équilibre) 150
 symétrie orbitale 15
 système
 à temps continu, 1
 à temps discret, 1, 141
 autonome, 1
 conservatif, 12, 32, 80, 82
 de Lotka-Volterra, 176
 dissipatif, 32, 83
 dynamique, 1
 hamiltonien, 79, 82, 245
 linéaire, 20, 24
 linéarisé, 89
 miroir, 16, 35, 100, 138
 systèmes
 conjugués, 22, 237
 semblables, 24

T

tapis de Sierpinski 220, 267
 temporelle (dérivée) 85
 temps continu (système à) 1
 temps discret (système à) 1, 141
 théorème
 de Cauchy-Lipschitz, 7, 158, 207
 de Green, 71
 de Hartman-Grobman, 93
 de la divergence, 32
 de la sphère chevelue, 117
 de Liapounov (1^{er} th.), 86
 de Liapounov (2^e th.), 91
 de linéarisation de Sternberg, 95
 de Liouville, 82
 de Picard-Lindelöf, 207
 de Poincaré-Bendixson, 159, 168
 de Sarkovski, 190
 de stabilité structurelle, 133
 des variétés remarquables (1^{er}), 108
 des variétés remarquables (2^e), 108
 du redressement, 30
 général de stabilité, 50
 KAM, 171

théorie de Liapounov 83
 topologie 199
 associée, 201
 topologique
 (espace), 199
 (variété), 203
 trajectoire 5, 49, 143, 149
 chaotique, 171, 172, 193
 génératrice, 58, 60, 61
 hétérocline, 112
 homocline, 112
 périodique, 20, 104
 transcritique (bifurcation) 135
 transitivité
 des ensembles-limites, 103
 du flot, 18
 transitoire
 (phase), 189
 (régime), 189
 transverse
 (section), 165, 262
 (variété), 141
 triadique (ensemble) 220
 triangle de Sierpinski 220, 267

V

variété 3, 30, 203
 centrale, 108
 différentielle, 10, 113, 203
 instable, 108
 remarquable, 107, 157
 stable, 108
 topologique, 203
 transverse, 141
 variétés remarquables
 (1^{er} théorème des), 108
 (2^e théorème des), 108
 vecteur tangent (à une variété) 206
 vectoriel normé (espace) 201
 Verhulst (François) 6
 voisinage 199
 von Koch (flocon de) 220, 267